

公告本

359934

申請日期	86.11.04
案 號	86116366
類 別	H04L ²⁷ / ₃₂

359934

A4
C4

(以上各欄由本局填註)

發明專利說明書

一、發明 名稱	中 文	盲目等化之一般化多模數技術
	英 文	"A GENERALIZED MULTIMODULUS TECHNIQUE FOR BLIND EQUALIZATION"
二、發明 人	姓 名	1. 珍 - 潔魁斯 華納 2. 傑安 楊
	國 籍	1. 法國 2. 加拿大
	住、居所	1. 美國新澤西州賀蒙德市賀蒙德路852號 2. 美國新澤西州馬波羅市懷特尼路10號
三、申請人	姓 名 (名稱)	美商朗訊科技公司
	國 籍	美國
	住、居所 (事務所)	美國新澤西州摩里山丘市山脈大道600號
	代 表 人 姓 名	麥克·R·格林

(由本局填寫)

承辦人代碼：
大類：
I P C分類：

A6
B6

本案已向：

國(地區) 申請專利，申請日期： 案號： ， ☐有 ☐無主張優先權
美國 1996 年 12 月 12 日 08/766,406 ☒有 ☐無主張優先權

有關微生物已寄存於： ，寄存日期： ，寄存號碼：

(請先閱讀背面之注意事項再填寫本頁各欄)

裝

訂

線

四、中文發明摘要 (發明之名稱： 盲目等化之一般化多模數技術)

本案說明一種供使用於盲目等化之多模數算法之一般化形式 (generalized form of a multimodulus algorithm, 簡稱 GMMA)。一接收機使用一信號點星座表示 256 電平。此信號空間分為樣本或數據子集。相對於每一樣本子集完成價值函數最小化。

英文發明摘要 (發明之名稱： "A GENERALIZED MULTIMODULUS
TECHNIQUE FOR BLIND EQUALIZATION")

A generalized form of a multimodulus algorithm (GMMA) is described for use in blind equalization. A receiver uses a signal point constellation representing 256 levels. This signal space is divided into sample, or data, subsets. Cost function minimization is done with respect to each sample subset.

(請先閱讀背面之注意事項再填)
為本頁各欄

裝

訂

線

五、發明說明(1)

相關申請案之相互參照

相關內容揭示於下列 Werner 等人 1996 年 5 月 7 日提出之待決共同讓渡美國專利申請案 08/646404 號；1996 年 9 月 18 日提出之 08/717582 號；1996 年 11 月 8 日提出之 XXX 號；以及 XXX 提出之 XXX 號。

發明之背景

本發明係關於通訊設備，尤指在接收機之盲目等化。

在盲目等化，接收機之等化器予以會聚，而不使用訓練信號。如在該項技藝所知，有二盲目等化技術：一在本案稱作"約化星座算法"(reduced constellation algorithm，簡稱 RCA)(例如，請見 Y. Sato, "A Method of Self-recovering Equalization for Multilevel Amplitude-Modulation Systems, "IEEE Trans. Commun., pp. 679-682，1975 年 6 月；以及 1980 年 10 月 7 日授予 Godard 之美國專利 4,227,152 號)；以及另一技術為所謂之"固定模數算法"(constant modulus algorithm，簡稱 CMA)(例如，請見 D. N. Godard, "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems, "IEEE Trans. Commun., vol. 28, no. 11, pp. 1867-1875，1980 年 11 月；以及 N. K. Jablon, "Joint Blind Equalization, Carrier Recovery, and Timing Recovery for High-Order QAM Signal Constellations", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, no. 6, pp.1383-1398, 1992)。而且，Werner 等人 1996 年 5 月 7 日所提出，名稱為"Blind Equalization"之待決共同讓渡之美國專利申請案 08/646404 號，提出一種

五、發明說明(2)

新盲目等化技術-多模數算法(multimodulus algorithm, 簡稱 MMA)-作為以上所述 RCA 及 CMA 方法之一種替代。

不幸的是, 不論使用 RCA, CMA, 或 MMA 方法, 在信號點星座所表示之符號電平數也影響使等化器盲目會聚之能力。換言之, 符號電平數增加時, 增加"開眼"("opening the eye")之困難(如此詞在該技藝所稱)。

發明之概述

一種盲目等化算法適於在信號空間使用較高符號電平數改進系統之性能。特別是, 供使等化器適應之價值函數予以修改為等化器輸出樣本在其內之信號空間區域之函數。

在本發明之一種實施例, 一接收機使用一信號點星座表示 256 電平。此信號空間予以分為樣本子集。相對於供 MMA 算法之每一樣本子集, 完成價值函數最小化。此為 MMA 算法之一種一般化形式, 在本案稱作 GMMA。

附圖之簡要說明

圖 1 為一具體實施本發明原理之通訊系統, 其一部份之例證性方塊圖;

圖 2 為一種分相等化器之例證性方塊圖;

圖 3 為一種供使用於等化器之自適應濾波器, 其一部份之例證性方塊圖;

圖 4 為一種交叉耦合等化器之例證性方塊圖;

圖 5 為一種四濾波器等化器之例證性方塊圖;

圖 6 為一等化器在會聚前, 其輸出信號之例證性信號點曲線圖;

五、發明說明 (3)

圖 7 爲一供一使用 MMA 盲目等化方法之系統之等化器，其輸出信號之例證性信號點曲線圖；

圖 8 爲例證性信號點曲線圖，例示 RCA 盲目等化方法之約化信號點星座；

圖 9 爲例證性信號點曲線圖，例示 CMA 盲目等化方法之圓形輪廓；

圖 10 爲例證性信號點曲線圖，例示 MMA 盲目等化方法之逐段線性輪廓；

圖 11 及 12 爲一具體實施本發明原理之接收機，其一部份之例證性方塊圖；

圖 13，14，及 15 爲例證性信號點曲線圖，例示供非方形星座之 MMA 盲目等化方法之逐段線性輪廓；

圖 16 及 17 爲一供一使用二步驟 MMA 盲目等化方法之通訊系統之等化器，其輸出信號之例證性信號點曲線圖；

圖 18 示一表，提供 RCA，CMA，及 MMA 之間，盲目等化方法，無 CHCF 之一般比較；

圖 19 示一供使用於 RCA，CMA，及 MMA 盲目等化方法之例證性數據值之表；

圖 20 爲 64-CAP 信號點星座之一種不正確對角解答之例證性曲線圖；

圖 21 示價值函數與增加符號電平數之例證性比較表；

圖 22 以曲線示界定符號子集之一組例證性 GMMA 參數；

圖 23 示確定參數值 m_i 之例證性流程圖；以及

五、發明說明 (4)

圖 24 以曲線示界定供配合 256-CAP 使用之符號子集之一組例證性 GMMA 參數。

詳細說明

圖 1 中示一種具體實施本發明原理之通訊系統，其一部份之例證性高電平方塊圖。僅供例證性目的，假設接收機 10 接收一 CAP(無載波，調幅，調相)信號，其可由下式表示：

$$r(t) = \sum_n [a_n p(t - nT) - b_n \tilde{p}(t - nT)] + \xi(t) \quad (1)$$

其中 a_n 及 b_n 為不連續值多電平符號， $p(t)$ 及 $\tilde{p}(t)$ 為形成 Hilbert 對之脈衝響應， T 為符號周期，及 $\xi(t)$ 為導入頻道之附加性雜訊。

方程(1)中假設 CAP 信號已畸變，同時傳播通過通訊頻道 9，並經歷符號間干擾(intersymbol interference，簡稱 ISI)。此 ISI 係由頻道內 ISI(彼此干擾之 a_n 或 b_n 符號)及頻道間 ISI(符號彼此干擾之 a_n 及 b_n)所構成。接收機 10 之目的為除去 ISI 及使附加性雜訊 $\xi(t)$ 之效應最小，以提供信號 $r'(t)$ 。創新概念將就一種供在接收機 10 使用之 GMMA 盲目等化算法予以例證性說明。然而，在說明創新概念前，先提出關於自適應濾波器以及以上所述 RCA，CMA，及 MMA 算法之有些背景資訊。而且，本文中所稱自適應濾波器，為例如一種部份間開線性等化器(fractionally spaced linear equalizer)，其在下文簡稱為 FSLE 等化器，或簡稱等化器。

五、發明說明 (5)

等化器結構

圖 2 中示一例證性分相 FSLE 等化器 100。假設 FSLE 等化器 100 依一包含二維：一同相組份及一正交組份之輸入信號操作。FSLE 等化器 100 包含二並聯數位自適應濾波器，實施為有限脈衝響應 (finite impulse response，簡稱 FIR) 濾波器 110 及 120。等化器 100 名為"分相 FSLE"，因為二 FIR 濾波器 110 及 120 會聚至同相及正交濾波器。圖 3 中示等化器結構之有些例證性細節。二 FIR 濾波器 110 及 120 共用同一抽頭延遲線 115，其儲存連續類比數位轉換器 (A/D) 125 樣本 r_k 之順序。A/D 125 之取樣速率 $1/T'$ 一般為高於符號速率 $1/T$ 三至四倍，並以一种致使其滿足實信號取樣定理之方式予以選擇。假設 $T/T'=i$ ，其中 i 為整數。

如圖 3 中所示之二自適應 FIR 濾波器 110 及 120，其輸出係以符號速率 $1/T$ 予以計算。等化器抽頭及輸入樣本可由對應之 N -維向量表示。因此，現在界定下列關係：

$$\mathbf{r}_n^T = [r_k, r_{k-1}, \dots, r_{k-N}] = \text{在延遲線上 A/D 樣本之向量；} \quad (2)$$

$$\mathbf{c}_n^T = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_N] = \text{同相抽頭係數之向量；以及} \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_n^T = [d_0, d_1, d_2, \dots, d_N] = \text{正交相抽頭係數之向量；} \quad (4)$$

其中上標 T 標示向量移項，下標 n 指符號周期 nT ，及 $k=in$ 。

令 Y_n 及 \tilde{Y}_n 分別為阜計算之同相及正交濾波器之輸出，

五、發明說明(6)

以及：

$$y_n = c_n^T r_n; \text{ 及} \quad (5)$$

$$\tilde{y}_n = d_n^T r_n. \quad (6)$$

輸出 y_n ，及 \tilde{y}_n ，或同等而言，複輸出 $Y_n = y_n + j\tilde{y}_n$ 之 X/Y 顯示，名為信號星座。圖 6 及 17 示一在使用 MMA 算法之例證性會聚前後之 64-CAP 星座。("64-CAP" 一詞指在信號空間之預先界定符號數，或表示 6 位元之每一符號之信號星座，由於 $2^6=64$ 。關於 CAP 通訊系統之另外資訊請見 J. J. Werner, "Tutorial on Carrierless AM/PM-Part I-Fundamentals and Digital CAP Transmitter, "Contribution to ANSI X3T9.5 TP/PMD Working Group, Minneapolis, June 23, 1992。")在會聚後，信號星座係由複符號 $A_n = a_n + jb_n$ 被有些小雜訊及 ISI 所訛誤之顯示所構成。

在正常操作模式，圖 2 中所示之判定裝置(或限幅器) 130 及 135 將等化器 100 之取樣輸出 Y_n 及 \tilde{Y}_n 與有效符號值 a_n 及 b_n 比較，並對已傳輸之符號作成判定。此等限幅符號將予標示 \hat{a}_n 及 \hat{b}_n 。接收機然後計算下列同相及正交誤差 e_n 及 \tilde{e}_n ：

$$e_n = y_n - \hat{a}_n, \quad (7a)$$

$$\tilde{e}_n = \tilde{y}_n - \hat{b}_n, \quad (7b)$$

並且二自適應濾波器之抽頭係數使用熟悉之最小均方 (least-mean-square，簡稱 LMS) 算法予以更新，亦即，

五、發明說明 (7)

$$c_{n+1} = c_n - \alpha e_n r_n, \quad (8a)$$

$$d_{n+1} = d_n - \alpha \tilde{e}_n r_n, \quad (8b)$$

其中 α 為使用於抽頭調整算法之分段大小。

現請參照圖 4，圖示一交叉耦合 FSLE, 200。對於此等化器結構，A/D 樣本首先分別予以反饋至二固定之同相及正交 FIR 濾波器，210 及 205。在此情形，取樣速率 A/D 125 之 $1/T'$ 一般等於四倍符號速率 $1/T$ 。二固定 FIR 濾波器之輸出以速率 $1/T''$ 予以計算，如此項技藝上所知，其與供分析信號之取樣定理一致。輸出信號然後予以饋給至具有所謂交叉耦合結構之等化器 200。一般為， $1/T''$ 為二倍符號速率 $1/T$ 。

交叉耦合等化器 200 使用二自適應 FIR 濾波器 215a 及 215b，各有抽頭向量 c_n 及 d_n 。為求簡單，再次使用相同抽頭向量記號 c_n 及 d_n （其已使用供先前所說明之圖 2 之等化器 100）。然而，精於此項技藝者應該明白，抽頭向量為二型式之等化器不同。此二濾波器各使用二次，以計算等化器之輸出 Y_n 及 \tilde{Y}_n 。令 r_n 及 \tilde{r}_n 為同相及正交濾波器之輸出向量，用以計算交叉耦合等化器之輸出。可作成下列定義：

$$C_n = c_n + jd_n, \quad (9a)$$

$$R_n = r_n + j\tilde{r}_n, \text{ 及 } \quad (9b)$$

$$Y_n = y_n + j\tilde{y}_n. \quad (9c)$$

五、發明說明 (8)

等化器之複輸出 Y_n 可寫成下列精簡方式：

$$Y_n = C_n^{*T} R_n \quad (10)$$

其中星號 * 標示複共軛。作成限幅複符號 \hat{A}_n ，及複誤差 E_n 之下列定義：

$$\hat{A}_n = \hat{a}_n + j\hat{b}_n, \quad (11a)$$

$$E_n = Y_n - \hat{A}_n. \quad (11b)$$

更新複抽頭向量 C_n 之 LMS 算法可寫作：

$$C_{n+1} = C_n - \alpha E_n^* R_n. \quad (12)$$

現請參照圖 5，圖示一四濾波器 FSLE。除了自適應部份由四不同濾波器，而非二濾波器予以使用二次所構成外，四濾波器等化器 300 具有與圖 4 中所示交叉耦合 FSLE 200 相同之一般結構。為此原因，其名為四濾波器 FSLE。等化器 300 之二輸出信號予以計算如下：

$$y_n = c_{1,n}^T r_n + d_{2,n}^T \tilde{r}_n, \text{ 及} \quad (13a)$$

$$\tilde{y}_n = c_{2,n}^T \tilde{r}_n - d_{1,n}^T r_n. \quad (13b)$$

在方程 (7a) 及 (7b) 使用同相及正交誤差 e_n 及 \tilde{e}_n 之定義，產生四濾波器之下列抽頭更新算法：

五、發明說明 (9)

$$c_{1,n+1} = c_{1,n} - \alpha e_n r_n \quad (14a)$$

$$d_{1,n+1} = d_{1,n} + \alpha \tilde{e}_n r_n \quad (14b)$$

$$c_{2,n+1} = c_{2,n} - \alpha \tilde{e}_n \tilde{r}_n, \text{ 及} \quad (15a)$$

$$d_{2,n+1} = d_{2,n} - \alpha e_n \tilde{r}_n. \quad (15b)$$

如圖 2-5 中所示之有些先前技藝等化器，其結構業經概括說明，現將使用圖 2 之等化器結構，說明盲目等化概念之一般概觀。

盲目等化之概念

在正常(穩態)操作模式，圖 2 中之判定裝置，亦即限幅器 130 及 135，將等化器複輸出樣本 Y_n ，(其中 $Y_n = y_n + j\tilde{y}_n$)，與所有可能之傳輸複符號， A_n (其中 $A_n = a_n + jb_n$) 比較，並選擇最接近 Y_n 之符號 \hat{A}_n 。接收機然後計算誤差 E_n ，其中：

$$E_n = Y_n - \hat{A}_n, \quad (16)$$

其用以更新等化器 100 之抽頭係數。此種型式之抽頭適應名為"判定導向"，因為其使用限幅器 130 及 135 之判定。最常見抽頭更新算法為 LMS 算法，其為一種隨機梯度算法，其使如下所界定之均方誤差(MSE)減至最小：

$$MSE \triangleq E[|E_n|^2] = E[|Y_n - \hat{A}_n|^2] = E[e_n^2] + E[\tilde{e}_n^2], \quad (17)$$

其中 $E[.]$ 標示預期，以及 e_n 及 \tilde{e}_n 分別為同相及正交誤差。

在起動之開始，如圖 6 中所例示，等化器 100 之輸出信號 Y_n 被大量符號間干擾所訛誤。後者表示使用如圖 2 所

五、發明說明 (10)

示之分相 FSLE 供 64-CAP 接收機所獲得之實驗數據。

在起動時使用訓練順序時(亦即 A_n 符號之預先界定順序)，接收機可使用等化器輸出信號 Y_n 及傳輸符號 A_n 之已知順序計算有意義誤差 E_n 。在此情形，抽頭適應便說是將行完成為有"理想參考"，使其有別於判定導向抽頭適應。

然而，無訓練順序可利用時，等化器 100 必須予以盲目會聚。在此情形，判定導向抽頭更新算法便無法用以使等化器會聚，因為如自圖 6 將會明白，限幅器作成太多錯誤判定。

因此，盲目等化之基本原則為使用一種抽頭適應算法，使價值函數最小，其較之方程(17)所表示之 MSE 更適合提供等化器 100 之初始會聚。以下說明使用於 RCA，CMA，及 MMA 算法之價值函數。

等化器之會聚在盲目起動時通常包含二主要步驟。第一，一盲目等化算法用以開啓"眼圖。"(在下文，此將稱之為"其開眼。")眼一旦足夠開啓，接收機便切換至判定導向抽頭適應算法。

約化之星座算法(RCA)

本節提供 RCA 算法之一般概觀。此一般概觀然後就每一例證性等化器結構後隨以上所說明 RCA 算法之說明。利用 RCA 算法，相對於較之所接收之星座具有較少點數之信號星座得出使用於抽頭更新算法之誤差。如圖示，再次假設信號星座包含 64 符號。在 RCA 算法，約化星座一

五、發明說明 (11)

般係如圖 8 中所示，僅由四信號點所構成。請予察知，RCA 算法需要使用判定裝置，例如限幅器，以自約化之星座選擇最接近之信號點。所接收樣本 Y_n 與約化星座之最接近信號點 $\hat{A}_{r,n}$ 間之誤差為複數：

$$E_{r,n} = e_{r,n} + j\tilde{e}_{r,n} = Y_n - \hat{A}_{r,n}, \text{ 其中} \quad (18)$$

$$\hat{A}_{r,n} = \hat{a}_{r,n} + j\hat{b}_{r,n} = R [\text{sgn}(y_n) + j\text{sgn}(\tilde{y}_n)], \text{ 及} \quad (19)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 為正負號函數，並且在右方之表達式對應於約化星座係由四點所構成之情形。約化星座算法使下列價值函數最小：

$$CF = E[|E_{r,n}|^2] = E[e_{r,n}^2 + \tilde{e}_{r,n}^2] = E[|Y_n - \hat{A}_{r,n}|^2], \quad (20)$$

其中 $E[\cdot]$ 標示預期，並且其中 $e_{r,n}$ 指限幅器誤差。

現請考慮圖 2 中所示之分相等化器結構。使用方程 (5)，(6)，及 (20)，產生下列方程：

$$e_{r,n} = y_n - \hat{a}_{r,n} = \mathbf{c}_n^T \mathbf{r}_n - R \text{sgn}(y_n), \quad (21a)$$

$$\tilde{e}_{r,n} = \tilde{y}_n - \hat{b}_{r,n} = \mathbf{d}_n^T \mathbf{r}_n - R \text{sgn}(\tilde{y}_n) \quad (21b)$$

方程 (20) 相對於抽頭向量 \mathbf{c}_n 及 \mathbf{d}_n 所表示之價值函數，其梯度等於：

$$\nabla_{\mathbf{c}}(CF) = 2E[e_{r,n}\mathbf{r}_n], \text{ 及} \quad (22a)$$

$$\nabla_{\mathbf{d}}(CF) = 2E[\tilde{e}_{r,n}\mathbf{r}_n]. \quad (22b)$$

頻道完全等化時，亦即所接收之樣本 Y_n 等於符號值 A_n

五、發明說明 (12)

時，

此等梯度等於零。此狀況導致下列值 R：

$$R = \frac{E[a_n^2]}{E[|a_n|]} \quad (23)$$

例如，請考慮相對於抽頭向量 c_n 之梯度。自方程(21a)及(21b)之左方有狀況： $E[(y_n - R \operatorname{sgn}(y_n))r_n] = 0$ 。利用完全等化 $y_n = a_n$ 。而且，如果假設不同符號不相關，則： $E[a_n r_n] = k_n E[a_n^2]$ ，其中 k_n 為一固定向量，其諸項為頻道之函數。以上狀況然後可寫作 $E[a_n^2] - R E[\operatorname{sgn}(a_n) a_n] = 0$ 。請察知 $\operatorname{sgn}(a_n) a_n = |a_n|$ 並解 R，便產生方程(23)。

方程(22a)及(22b)中之非平均梯度可使用於隨機梯度算法，使等化器之抽頭係數適應，以便產生下列抽頭更新算法：

$$c_{n+1} = c_n - \alpha [y_n - R \operatorname{sgn}(y_n)] r_n \quad \text{及} \quad (24a)$$

$$d_{n+1} = d_n - \alpha [\tilde{y}_n - R \operatorname{sgn}(\tilde{y}_n)] r_n \quad (24b)$$

現請參照圖 4 所例示之交叉耦合 FSLE 結構，自方程(10)計算此等化器之複輸出 Y_n 。使用方程(20)中之此表達式，相對於複抽頭向量 C_n 之價值函數，其梯度為：

$$\nabla_c = E[(Y_n - \hat{A}_{r,n})^* R_n] \quad (25)$$

假定一完全等化頻道，便產生 R 之下列表達式：

五、發明說明 (13)

$$R = \frac{E[|A_n|^2]}{E[|a_n|] + E[|b_n|]} = \frac{E[|A_n|^2]}{2 E[|a_n|]}, \quad (26)$$

其中在右方之表達式為與方程(23)中 $E[|a_n|] = E[|b_n|]$ 之通常情形者相同。複抽頭向量 C_n 之抽頭更新算法由下式求得：

$$C_{n+1} = C_n - \alpha(Y_n - \hat{A}_{r,n}) \cdot R_n \quad (27)$$

現請參照圖 5 所例示之四濾波器 FSLE 結構，自方程(13a)及(13b)計算求得此四濾波器等化器結構之輸出 y_n 及 \tilde{y}_n 。方程(20)中相對於四抽頭向量之價值函數，其梯度與方程(22a)及(22b)中所求得者相似，並且此處將不予重複。抽頭更新算法係由下式求得：

$$c_{1,n+1} = c_{1,n} - \alpha[y_n - R \operatorname{sgn}(y_n)] r_n \quad (28a)$$

$$d_{1,n+1} = d_{1,n} + \alpha[\tilde{y}_n - R \operatorname{sgn}(\tilde{y}_n)] r_n \quad (28b)$$

$$c_{2,n+1} = c_{2,n} - \alpha[\tilde{y}_n - R \operatorname{sgn}(\tilde{y}_n)] \tilde{r}_n, \text{ 及} \quad (28c)$$

$$d_{2,n+1} = d_{2,n} - \alpha[y_n - R \operatorname{sgn}(y_n)] \tilde{r}_n, \quad (28d)$$

其中常數 R 與方程(23)中相同。

RCA 之主要優點為其實施之低成本，因為其一般為最不複雜之盲目等化算法。除了限幅器使用不同之點數外，方程(24a)，(24b)，(27)及(28)所示之抽頭更新算法與方程(8a)及(8b)所示之標準 LMS 算法表示相同。

RCA 之主要缺點為其不可預測性及不堅固耐用。算法已知常會聚至所謂之"錯誤解答。"自一種頻道等化透視，此等解答為十分可接受，但不允許接收機回復正確數據。應

五、發明說明 (14)

予指出，圖 2 中之等化器結構較圖 4 中之結構遠較為可能會聚至錯誤解答。此係由於前者較後者具有遠為較多之自由度。

圖 2 中之等化器結構，其常見之錯誤解答，為所謂之對角解答。在此情形，同相及正交濾波器均會聚至同一濾波器，因而其均產生相同輸出樣本。因此，在等化器之輸出，如圖 20 中就 64-CAP 信號點星座所例示，其信號星座係由沿一對角線所叢集之點所組成。吾人發現對角解答之發生頻率最為通訊頻道相依。特別是，其在頻道導入一定之部份傳播延遲補償時造成。(對照而言，圖 16 示一使用 MMA 盲目等化算法，供 64-CAP 信號點星座之例證性正確解答。)

在同相及正交濾波器導入相差整數符號周期之傳播延遲時，便可能發生其他錯誤解答。例如，在一既定取樣瞬間， a_n 可能出現在同相濾波器之輸出，而 b_{n-1} 出現在正交濾波器之輸出。此種錯誤解答在信號星座在等化器之輸出產生不對應於所傳輸符號之點。例如，- 32 點信號星座可能轉換為 - 36 點星座，並且圖 13，14，及 15 中之 128 點星座可能轉換為 - 144 點星座。

固定模數算法(CMA)

本節提供 CMA 算法之一般概觀。此一般概觀然後就每一以上所說明之例證性等化器結構後隨 CMA 算法之說明。

CMA 算法使等化樣本 Y_n 相對於一半徑 R 之圓之分散最

五、發明說明 (15)

小。圖 9 中以曲線例示此情形。CMA 算法使下列價值函數最小：

$$CF = E[(|Y_n|^L - R^L)^2], \quad (29)$$

其中 L 為正整數。情形 $L=2$ 為最常使用於實作。方程 (29) 中之價值函數為真正二維價值函數，其使等化器複輸出信號 Y_n 相對於圓形二維輪廓之分散最小。

現請考慮圖 2 中所示之分相等化器結構。相對於抽頭向量 c_n 及 d_n 之價值函數，其梯度係由下式求得藉：

$$\nabla_c(CF) = 2L \times E[(|Y_n|^L - R^L)|Y_n|^{L-2}y_n r_n], \text{ 及} \quad (30a)$$

$$\nabla_d(CF) = 2L \times E[(|Y_n|^L - R^L)|Y_n|^{L-2}\tilde{y}_n r_n]. \quad (30b)$$

假定一完全等化頻道，便產生 R^L 之下列值：

$$R^L = \frac{E[|A_n|^{2L-2} a_n^2]}{E[|A_n|^{L-2} a_n^2]} = \frac{E[|A_n|^{2L}]}{E[|A_n|^L]}, \quad (31)$$

其中在右方之表達式保持供符號 a_n 及 b_n 之統計數字為相同之通常情形。就 $L=2$ 而言，產生下列隨機梯度抽頭更新算法：

$$c_{n+1} = c_n - \alpha(y_n^2 + \tilde{y}_n^2 - R^2)y_n r_n, \text{ 及} \quad (32a)$$

$$d_{n+1} = d_n - \alpha(y_n^2 + \tilde{y}_n^2 - R^2)\tilde{y}_n r_n. \quad (32b)$$

現請參照圖 4 所例示之交叉耦合 FSLE 結構，方程 (29) 所表示相對於複抽頭向量 C_n 之價值函數，其梯度等於：

五、發明說明 (16)

$$\nabla_c(CF) = 2L \times E[(|Y_n|^L - R^L) |Y_n|^{L-2} Y_n^* R_n]. \quad (33)$$

就 $L=2$ 而言，複抽頭向量之抽頭更新算法變成：

$$C_{n+1} = C_n - \alpha(|Y_n|^2 - R^2) Y_n^* R_n, \quad (34)$$

其中 R 係由在方程(31)右方之表達式求得。

現請參照圖 5 所例示之四濾波器 FSLE 結構，相對於方程(29)所示之價值函數，其四抽頭向量梯度係與方程(30a)及(30b)所求得者相似。就 $L=2$ 而言，抽頭更新算法變成：

$$c_{l,n+1} = c_{l,n} - \alpha(y_n^2 + \tilde{y}_n^2 - R^2) y_n^* r_n, \quad (35a)$$

$$d_{l,n+1} = d_{l,n} + \alpha(y_n^2 + \tilde{y}_n^2 - R^2) \tilde{y}_n^* r_n, \quad (35b)$$

$$c_{2,n+1} = c_{2,n} - \alpha(y_n^2 + \tilde{y}_n^2 - R^2) \tilde{y}_n^* \tilde{r}_n, \text{ 及} \quad (35c)$$

$$d_{2,n+1} = d_{2,n} - \alpha(y_n^2 + \tilde{y}_n^2 - R^2) y_n^* \tilde{r}_n. \quad (35d)$$

常數 R 與方程(31)中相同。

CMA 之主要優點為其堅固耐用及可預測性。不同於 RCA，其很少會聚至錯誤解答。對於有些應用，除了此處所考慮者以外，其也具有能在存在有載波相變化時使頻道部份等化之優點。CMA 之主要缺點為其實施之成本。CMA 抽頭更新算法較 RCA 算法及 MMA 算法者複雜，並且另外 CMA 算法在等化器之輸出需要一所謂之"旋轉器"。因此，一旦達成一定程度之會聚，在切換至判定導向抽頭適應算法前，等化器之輸出信號必須予以逆向旋轉。在等

五、發明說明 (17)

化器後需使用旋轉器，對於有些型式之應用，增加實施 CMA 之成本。然而，應予指出，有其他應用，諸如語音頻帶及電纜數據機，在此等應用無論如何需要旋轉器功能供其他目的，諸如跟蹤導入頻道之頻率補償。在此等後者情形，需要旋轉不增加實施之成本，並且 CMA 變成非常具吸引力之方法。

多模數算法(MMA)

MMA 算法使等化器輸出樣本 y_n 及 y_n 繞逐段線性同相及正交輪廓之分散最小。對於型式為供 16-，64-，及 256-CAP 系統使用之正方信號星座之特殊情形，輪廓變成直線。圖 10 中以曲線例示此情形供一 64 點星座。多模數算法使下列價值函數減至最小：

$$CF = E [(y_n^L - R^L(Y_n))^2 + (\tilde{y}_n^L - R^L(Y_n))^2], \quad (36)$$

其中 L 為一正整數以及 $R(Y_n)$ 及 $\tilde{R}(Y_n)$ 取不連續正值，其依等化器輸出 Y_n 而定。

多模數算法(MMA)- 正方星座

就正方星座而言， $R(Y_n) = \tilde{R}(Y_n) = R = \text{常數}$ ，因而方程 (36) 之價值函數變成：

$$CF = CF_I + CF_Q = E [(y_n^L - R^L)^2 + (\tilde{y}_n^L - R^L)^2]. \quad (37)$$

不同於方程 (29) 所示 CMA 之價值函數，此並非真正二維價值函數。而是，其為二獨立之一維價值函數 CF_I 及 CF_Q 之和。現將就該三例證性型式之等化器 (以上所說明)

五、發明說明 (18)

說明 MMA 算法之應用。

就圖 2 中所示分相等化器結構而言，方程(37)中相對於抽頭向量 c_n 及 d_n 之價值函數，其梯度等於：

$$\nabla_c (CF) = 2L \times E[(|y_n|^L - R^L)|y_n|^{L-2}y_n r_n], \text{ 及} \quad (38a)$$

$$\nabla_d (CF) = 2L \times E[(|\tilde{y}_n|^L - R^L)|\tilde{y}_n|^{L-2}\tilde{y}_n r_n]. \quad (38b)$$

假定一完全等化頻道，產生 R^L 之下列值：

$$R^L = \frac{E[a_n^{2L}]}{E[|a_n|^L]} \quad (39)$$

以 $L=2$ 達成最佳成本與性能間之折衷，在該情形，抽頭更新算法變成

$$c_{n+1} = c_n - \alpha(y_n^2 - R^2)y_n r_n, \text{ 及} \quad (40a)$$

$$d_{n+1} = d_n - \alpha(\tilde{y}_n^2 - R^2)\tilde{y}_n r_n. \quad (40b)$$

現請參照圖 4 所例示之交叉耦合 FSLE 結構，方程(37)所示相對於複抽頭向量 C_n 之價值函數，其梯度係由下式求得：

$$\nabla_C (CF) = 2L \times E[K \cdot R_n], \quad (41)$$

其中，

$$K = [(|y_n|^L - R^L)|y_n|^{L-2}y_n] + j[(|\tilde{y}_n|^L - R^L)|\tilde{y}_n|^{L-2}\tilde{y}_n]. \quad (42)$$

假定一完全等化頻道， R^L 之值為：

$$R^L = \frac{E[a_n^{2L} + b_n^{2L}]}{E[|a_n|^L + |b_n|^L]}, \quad (43)$$

五、發明說明 (19)

其約化至方程(39)，供符號 a_n 及 b_n 具有相同統計數字之通常情形。就 $L=2$ 而言，複抽頭向量 C_n 之抽頭更新算法變成：

$$C_{n+1} = C_n - \alpha K^* R_n \quad (44)$$

其中，

$$K = (y^2 - R^2)y + j(\tilde{y}^2 - R^2)\tilde{y} \quad (45)$$

現請參照圖 5 所例示之四濾波器 FSLE 結構，方程(37)所示相對於四抽頭向量之價值函數，其梯度與在方程(6.5)所求得者相似。就 $L=2$ 而言，抽頭更新算法變成：

$$c_{l,n+1} = c_{l,n} - \alpha (y_n^2 - R^2) y_n r_n \quad (46a)$$

$$d_{l,n+1} = d_{l,n} + \alpha (\tilde{y}_n^2 - R^2) \tilde{y}_n r_n \quad (46b)$$

$$c_{2,n+1} = c_{2,n} - \alpha (\tilde{y}_n^2 - R^2) \tilde{y}_n \tilde{r}_n, \text{ 及} \quad (46c)$$

$$d_{2,n+1} = d_{2,n} - \alpha (y_n^2 - R^2) y_n \tilde{r}_n \quad (46d)$$

常數 R 與方程(39)中相同。

圖 6，7，16，及 17 以曲線例示以上所述利用 MMA 算法供等化器 100 之二步驟盲目等化程序。圖 6 中示在任何形式之會聚前，等化器 100 之輸出信號。如以上所提及，圖 6 示使用如圖 2 所示之分相 FSLE，64-CAP 接收機所獲得之實驗數據。圖 7 例示 MMA 過程會聚之開始。如圖 16 中所示，MMA 技術使等化器足夠會聚，以清楚例示 64-符號信號空間為 64 雜訊束。雖然此等雜訊束一般將為不可接受供穩態操作-眼足夠開啓，以允許接收機切換至

五、發明說明 (20)

64 點限幅器及判定導向 LMS 算法。如圖 17 中所示，最後結果為一遠較為清潔之星座。一般為，在符號誤差速率較 10-2 為較佳時，在二適應模式，MMA 及判定導向之間，可作成清潔之過渡，雖然較差符號誤差速率也曾見成功之過渡。應予指出，圖 16 中之雜訊束可藉減少在 MMA 抽頭調整算法之步驟大小予以進一步減少。實在，在有些應用，可能免除切換至判定導向抽頭適應算法。然而，請予察知，此將會增加起動時間及所需數位精度之量。

可使用 MMA 算法供正方星座，而不必修改供非方形星座。在此情形，在計算常數 R 時必須謹慎，因為符號 a_n 及 b_n 之不連續電平不全部具有相同之發生概率(以下所說明)。然而，吾人發現，通過電腦模擬，MMA 算法之會聚對於非方形星座較之對於正方星座略微較不可靠。此可藉在下節所討論使用修改型 MMA 予以校正。

多模數算法(MMA)-非方形星座

圖 13，14，及 15 中例示相對於 128-CAP 信號星座，修改型 MMA 之原理。(128 點信號星座係以下列方式獲得。首先使用符號電平 ± 1 ， ± 3 ， ± 5 ， ± 7 ， ± 9 ， ± 11 界定一 144 點信號星座，然後在每一象限除去四角點。)現在繞逐段直線完成等化器輸出樣本 y_n 及 \hat{y}_n 分散之最小化。此再次為就 y_n 及 y_n 獨立完成。自方程(37)所得出之同相價值函數為：

$$CF_Q = E[(\tilde{y}_n^L - R_1^L)^2] \text{ 如果 } |y_n| < K, \text{ 及} \quad (47a)$$

$$CF_Q = E[(y_n^L - R_2^L)^2] \text{ 如果 } |y_n| > K. \quad (47b)$$

五、發明說明 (21)

自方程(37)所得出之正交價值函數為：

$$CF_I = E[(y_n^L - R_1^L)^2] \text{ 如果 } |\tilde{y}_n| < K, \text{ 及} \quad (47c)$$

$$CF = E[(y_n^L - R_2^L)^2] \text{ 如果 } |\tilde{y}_n| > K. \quad (47d)$$

常數 K 為所考慮之信號星座之函數，並為由經驗所確定。在 128-CAP 之電腦模擬，一建議之值為 $K=8$ 。在方程(47)使用二不同模數 R_1 及 R_2 ，因為使用於 128 點星座之符號 a_n 及 b_n 有二組電平 $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ 及 $\{\pm 9, \pm 11\}$ ，其具有不同之發生概率。如果有超過二組符號電平具有不同統計數字，可使用較多模數。

方程(47)中之模數 R_1 及 R_2 為在適用既定模數之符號電平組(以下所另外說明)評量符號之力矩，藉以自方程(39)計算求得。例如，請考慮圖 13，其例示同相尺寸之模數，並且其適用於 128-CAP 信號星座之實符號 a_n 。僅考慮第一象限便可計算符號之力矩。請考慮在此象限適用於 R_1 之 24 符號之子集。就此等符號 $a_n=1, 3, 5, 7, 9, 11$ ；以及 $b_n=1, 3, 5, 7$ 而言；因而 a_n 之每一值以概率 $4/24=1/6$ 發生。同樣， R_2 子集有 $a_n=1, 3, 5, 7$ 及 $b_n=9, 11$ 之 8 符號，因而 a_n 之每一值以概率 $2/8=1/4$ 發生。因此，符號之變異變成：

$$\text{對於 } R_1 \text{ 符號, } E[a_n^2] = \frac{1}{6}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2) \approx 47.67, \text{ 及} \quad (48a)$$

$$\text{對於 } R_2 \text{ 符號, } E[a_n^2] = \frac{1}{4}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = 21. \quad (48b)$$

五、發明說明 (22)

以相似方式計算符號之其他力矩，並且然後使用於方程 (39)，以評量各模數之值。

除了以依據以接收等化器輸出樣本 Y_n 之 R_1 或 R_2 替代常數 R 外，修改型 MMA 算法之抽頭更新算法與在方程 (40)，(44)，及 (46) 所求得者相同。圖 14 例示正交尺寸之模數，並且其適用於 128-CAP 信號星座之符號 b_n 。自表示圖 13 及 14 合併之圖 15 應該將會明白，同相及正交抽頭更新算法在既定符號周期無需使用相同模數 R_1 或 R_2 。

數據符號之力矩

下列說明討論"數據符號之力矩"之概念。特別是，符號 a_n 及 b_n 取值與奇整數 ± 1 ， ± 3 ， ± 5 ， ± 7 ，... 成比例時，提出力矩 $E[|a_n|^L]$ ， $E[|b_n|^L]$ ，及 $E[|A_n|^L]$ 之封閉形式表達式。此等表達式然後用以獲得封閉形式表達式，供使用於三盲目等化算法之常數 R ，並例示於圖 19 之表中(以下所說明)。

首先，假設符號 a_n 及 b_n 具有相同統計數字，因而 $E[|a_n|^L] = E[|b_n|^L]$ 。首先考慮整數冪之下列已知和數：

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2} m(m+1), \quad (49a)$$

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1), \quad (49b)$$

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \frac{1}{4} [m(m+1)]^2, \text{ 及 } \quad (49c)$$

$$\sum_{k=1}^m k^4 = \frac{1}{30} m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1). \quad (49d)$$

五、發明說明 (23)

此等和數可用以找出封閉形表達式供奇整數冪之和。例如，供冪一：

$$(1+3+5+7) = (1+2+3+4+5+6+7) - 2(1+2+3) \quad (50)$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^m (2k-1) = \sum_{k=1}^{2m-1} k - 2 \sum_{k=1}^{m-1} k = m^2,$$

其中在中間之二和數已使用封閉形式表達式之方程(49a)予以評量。奇整數冪之其他和可使用相似系列操控。

現請考慮正方信號星座，其使用具有值 ± 1 ， ± 3 ， ± 5 ， ± 7 ，... $\pm(2m-1)$ 之符號 a_n 及 b_n ，其中 m 為不同符號電平數(以量級計)。例如，4-CAP，16-CAP，64-CAP，及256-CAP正方信號星座，分別為 $m=1$ ，2，4，及8。也假設所有符號值為等概率。因此，符號 a_n 之力矩為：

$$E[|a_n|] = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m (2k-1) = m, \quad (51)$$

$$E[a_n^2] = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m (2k-1)^2 = \frac{1}{3}(4m^2-1), \quad (52)$$

$$E[|a_n|^3] = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m (2k-1)^3 = m(2m^2-1), \text{ 及} \quad (53)$$

$$E[a_n^4] = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m (2k-1)^4 = \frac{1}{15}(4m^2-1)(12m^2-7). \quad (54)$$

其次，考慮複符號 $A_n = a_n + jb_n$ 。假設符號 a_n 及 b_n 為不相關，便產生複符號偶數力矩之下列表達式：

$$E[|A_n|^2] = 2E[a_n^2], \text{ 及} \quad (55a)$$

$$E[|A_n|^4] = 2E[a_n^4] + 2[E|a_n|^2]^2. \quad (55b)$$

五、發明說明 (24)

在方程(55b)使用方程(52)及(54)，導致：

$$E[|A_n|^4] = \frac{4}{45}(4m^2 - 1)(28m^2 - 13) \quad (56)$$

現在可使用以上結果產生獲得封閉形式表達式供使用於各盲目等化算法之常數 R。產生此等常數之下列(顯著簡單)表達式：

$$R_{rca} \frac{E[a_n^2]}{E[|a_n|]} = \frac{4m^2 - 1}{3m}, \quad (57)$$

$$R_{mma}^2 \frac{E[a_n^4]}{E[a_n^2]} = \frac{12m^2 - 7}{5}, \text{ 及} \quad (58)$$

$$R_{mma}^2 \frac{E[|A_n|^4]}{E[|A_n|^2]} = \frac{56m^2 - 26}{15} \quad (59)$$

相對於非方形信號星座， a_n 及 b_n 之各符號電平 $2k-1$ 具有不同之發生概率，甚至在所有複符號 A_n 為等概率時。自圖 15 所例示之 128 點星座將會明白此情形。在此情形，必須根據一般公式計算符號之力矩：

$$E[|a_n|^L] = P_1 \sum_{k=1}^{m_1} (2k-1)^L + P_2 \sum_{n_1+1}^{m_2} (2k-1)^L + P_3 \sum_{m_2+1}^{n_1} (2k-1)^L + \dots \quad (60)$$

其中 P_1 為出現在對應和數之符號電平之發生概率。就代表性 32-CAP 及 128-CAP 星座而言，在(60)中之表達式限於二不同之概率 P_1 及 P_2 。

其他所有一切相等(亦即符號速率，成形濾波器等)，如果 $E[a_n^2] = E[b_n^2] = \text{常數}$ ，在 CAP 發射機之輸出便可獨立於所

五、發明說明 (25)

使用之信號星座之型式，保證固定之平均功率。當然，如果必須滿足平均功率限制，不同信號星座將必須使用不同之符號值。因此，通常一信號星座將使用符號值 $\lambda (2k-1)$ ，其中 λ 以一種致使滿足平均功率限制之方式予以選擇。為求簡單，假設 $E[a_n^2]=1$ 。就正方星座而言，然後可自方程(52)確定 λ 之值，以導致：

$$E[a_n^2] = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [\lambda(2k-1)]^2 = \frac{\lambda^2(4m^2-1)}{3} = 1 \rightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4m^2-1} \quad (61)$$

在方程(57)，(58)，及(59)中使用此表達式 λ ，產生正常化常數 R 之下列表達式：

$$\bar{R}_{rca} = \lambda \frac{E[a_n^2]}{E[|a_n|]} = \frac{\sqrt{4m^2-1}}{m\sqrt{3}}, \quad (62)$$

$$\bar{R}_{mma}^2 = \lambda^2 \frac{E[a_n^4]}{E[a_n^2]} = \frac{3}{5} \frac{12m^2-7}{4m^2-1}, \text{ 及} \quad (63)$$

$$\bar{R}_{cma}^2 = \lambda^2 \frac{E[|A_n|^4]}{E[|A_n|^2]} = \frac{1}{5} \frac{56m^2-26}{4m^2-1}. \quad (64)$$

可以相似方式獲得非方形星座之相似表達式。信號星座中之點數變成非常大時，產生正常化常數之下列漸近值：

$$m \rightarrow \infty \quad \bar{R}_{rca} \approx 1.155 \quad \bar{R}_{mma} \approx 1.342 \quad \bar{R}_{cma} \approx 1.673. \quad (65)$$

RCA，CMA，及 MMA 算法之概述

圖 18 之表中示 RCA，CMA，及 MMA 技術之一般比

五、發明說明(26)

較。另外，圖 19 中之所示之表，示常數 R ， R_1 及 R_2 之不同大小之信號星座例證值，其使用於以上所說明之 RCA，CMA，及 MMA 抽頭更新算法，盲目等化技術。圖 19 中所示之數據假設符號 a_n 及 b_n 取不連續值 ± 1 ， ± 3 ， ± 5 ， ± 7 ，...。如以上所說明得出此等常數之封閉形成表達式。

通常而言，RCA 算法較之 CMA 或 MMA 算法具有較不可靠之會聚。如在 CMA 與 MMA 算法之間，此等算法均有好處及缺點。例如，CMA 算法提供可靠之會聚-因此避免不正確之對角解答-但 CMA 算法需要昂貴之旋轉器。比較而言，MMA 算法不需要昂貴之旋轉器，但較之 CMA 算法較易受不正確會聚之影響。

符號電平之數

任何盲目會聚技術均受等化器之輸出信號，或樣本之分布所影響。因此，增加符號電平之數 m ，便增加等化器輸出樣本之分布，其復使得等化器盲目會聚較為困難。MMA 盲目等化算法與 LMS 算法標準間之下列比較例示此情形。

就標準 LMS 算法而言，價值函數使等化器之輸出信號 Y_n 與所傳輸符號 A_n 之未知順序間之誤差 e_n 減至最少。

$$CF = E[(Y_n - A_n)^2] = E[(y_n - a_n)^2 + (\tilde{y}_n - b_n)^2] = E[e_n^2(LMS) + \tilde{e}_{r,n}^2(LMS)] \quad (66)$$

其中 $Y_n = y_n + j\tilde{y}_n$ ，及 $A_n = a_n + jb_n$ 。

五、發明說明 (27)

比較而言，對於 MMA 盲目等化算法，價值函數使星座之分散最小：

$$CF = E[(y_n^2 - R^2)^2 + (\tilde{y}_n^2 - R^2)^2] = E[e_{r,n}^2(CF) + \tilde{e}_{r,n}^2(CF)], \quad (67)$$

其中由下式求得常數 R 之表達式：

$$R^2 = \frac{E[a_n^4]}{E[a_n^2]}. \quad (68)$$

比較方程(66)及(67)之二價值函數，可見誤差就 LMS 算法及 MMA 算法具有不同之闡釋。

在 LMS 算法，誤差 $e_{r,n}$ (LMS) 予以界定為

$$e_{r,n}(LMS) = y_n - a_n; \quad (69)$$

並且抽頭在梯度之相反方向予以更新：

$$c_{n+1} = c_n - \mu e_{r,n}(LMS) r_n = c_n - \mu (y_n - a_n) r_n. \quad (70)$$

y_n 及 a_n 表示限幅器之輸入及輸出時，抽頭更新時所使用之 LMS 基誤差相等於在限幅器所實測之誤差，並為一明確界定之量。因此，相對於限幅器之輸入及輸出直接計算誤差時，等化器可會聚至最佳解答。

對照而言，在 MMA 算法，誤差 $e_{r,n}$ (CF) 係予不同界定。請予察知，由於 LMS 算法使用信號之二階統計數字，而 MMA 使用四階統計數字，故此處使用一種簡化型之 MMA 算法供比較目的，而 $L=1$ 。對於此種一維 MMA，誤差 $e_{r,n}$

五、發明說明 (28)

(CF) 變成

$$e_{r,n}(CF) = |y_n| - R; \quad (71)$$

並且濾波器之抽頭予以更新如下：

$$c_{n+1} = c_n - \mu e_{r,n}(CF) r_n = c_n - \mu(|y_n| - R) r_n. \quad (72)$$

自方程(72)，抽頭不在限幅器誤差之方向予以確切更新。而是，參照具有約為實符號 a_n 之統計資訊之常數 R 完成誤差最小化。濾波器適應之發生依 R 之發生而定，而其依 m 而定。因此，誤差 $e_{r,n}(CF)$ 僅具有統計數字意義，並且就均方誤差(MSE)而言，並不始終保證等化器會聚至最佳解答。

如果盲目等化算法並非最佳，則等化器已會聚時 $CF \neq 0$ 。亦即，存在價值函數之殘餘值。例證而言，檢查MMA算法以探究價值函數之殘餘值 CF 為何。

對於具有完全會聚之盲目起動， $y_n \rightarrow a_n$ 。因此，價值函數 CF 會聚至 CF_{an} ：

$$CF = E[(y_n^2 - R^2)^2] \rightarrow CF_{an} = E[(a_n^2 - R^2)^2]. \quad (73)$$

此價值函數 CF_{an} 予以展開並簡化如下：

(請先閱讀背面之注意事項再填寫本頁)

裝

訂

線

五、發明說明 (29)

$$CF_{an} = E[(a_n^2 - R^2)^2] \quad (74a)$$

$$= E[a_n^4 - 2a_n^2 R^2 + R^4] \quad (74b)$$

$$= E[a_n^4 - 2a_n^2 \frac{E[a_n^4]}{E[a_n^2]} + R^4] \quad (74c)$$

$$= E[a_n^4] - 2E[a_n^2] \frac{E[a_n^4]}{E[a_n^2]} + R^4 \quad (74d)$$

$$= R^4 - E[a_n^4] \quad (74e)$$

$$= \frac{E^2[a_n^4]}{E^2[a_n^2]} - E[a_n^4] \quad (74f)$$

請予察知，僅提供分析供同相尺寸，並且相同分析適用於正交相尺寸。價值函數可表示為符號電平數 m 之函數。自以上數據"符號之力矩"計算之說明，求得常數 R ：

$$R^2 = \frac{12m^2 - 7}{5}, \quad (75)$$

並且由下式求得符號 a_n 之第四力矩：

$$E[a_n^4] = \frac{1}{15}(4m^2 - 1)(12m^2 - 7). \quad (76)$$

價值函數 CF_{an} 然後可改寫為：

$$CF_{an} = R^4 - E[a_n^4] \quad (77)$$

$$= \left(\frac{12m^2 - 7}{5}\right)^2 - \frac{1}{15}(4m^2 - 1)(12m^2 - 7) \quad (78)$$

$$= \frac{16}{75}(12m^2 - 7)(m^2 - 1) \quad (79)$$

$$= \frac{16}{75}(12m^4 - 19m^2 + 7). \quad (80)$$

在會聚後，方程(80)產生一表示價值函數之簡單方式，並可容易計算價值函數 CF_{an} 之穩態值。自 C-CAP 之星座點數可計算符號電平 m 之數(以量級計)：

五、發明說明 (30)

$$m = \frac{\sqrt{C}}{2} \quad (81)$$

自方程(80)，在圖 21 中所示之表提供若干 CAP 系統之例證性計算之值。如自此表可見，可僅達成供盲目等化器之最佳會聚供 $m=1$ 之 4-CAP。而且，價值函數 CF_{an} 之殘餘值，隨增加 m 而顯著增加。最後，由於數 m 之大值， CF_{an} 之殘餘值變大，而致使盲目等化器無法會聚。

一般化多模數算法 (GMMA)

由於以上所述，盲目等化算法適合在使用較高符號電平數之系統改進性能。特別是，供使等化器適應之價值函數予以修改為等化器輸出樣本在其內之信號空間之區域之函數。在本發明之一種實施例，一接收機使用一信號點星座表示 256 電平。此信號空間分為樣本子集。相對於每一 MMA 算法之樣本子集完成價值函數最小化。此為 MMA 算法之一般化形式，在本案稱為 GMMA (以下另外說明)。

如較早所說明，MMA 使等化器輸出樣本 y_n 繞逐段線性輪廓之分散最小。由下式求得 $L=2$ 之 MMA 價值函數之一般形式：

$$CF = E[(y_n^2 - R^2(y_n))^2] \quad (82)$$

其中 $R(y_n)$ 之值係由樣本 y_n 之分布函數所確定。對於正方星座， R 變成一單一常數(例如，請見圖 10)。然而，對於非方形星座， $R(y_n)$ 取多重值，其依具有不同統計數字之諸組符號 a_n 之數而定。例如，如圖 13 及 14 中所示，

五、發明說明 (31)

就 128-CAP 而言，符號係以二組予以傳輸，其值係由 $a_1 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ 及 $a_2 = (\pm 9, \pm 11)$ 求得。必要二常數 R_1 及 R_2 ，因為諸組符號 $a_{1,n}$ 及 $a_{2,n}$ 具有不同之概率分布。使用多重模數導致減少錯誤解答之數。特別是，使用二模數 R 時，造成 128-CAP 之 144 點解答之概率顯著減低。

使用單一輪廓之困難，為使用於抽頭更新算法之諸校正項，與相鄰符號間之間距比較變成非常大。因此，符號電平之數 m 增加時，開眼變成愈益困難。對於非常大 m 值，開眼將需要小步驟大小，致使會聚時間將無法接受。

因此，並根據創新概念，使諸子集等化器輸出樣本 y_n 繞若干輪廓之分散最小，在抽頭更新算法使校正項所可取之最大值減至最小。這方便開眼。

支援該創新概念，樣本子集之想法予以界定為：

$$y_n = \{y_{n,i}\} \quad i = 1, \dots, I, \quad (83)$$

其中 $I < m$ 。相對於每一樣本子集 $y_{n,i}$ 完成價值函數最小化。

$$CF = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I CF_i = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E[(y_{n,i}^2 - R_i^2)^2]. \quad (84)$$

價值函數約化至價值函數 CF_i ，對應於樣本子集 $y_{n,i}$ 。等化器會聚時， $y_n \rightarrow a_n$ ，或就樣本子集而言，吾人有 $\{y_{n,i}\} \rightarrow \{a_{n,i}\}$ 。等化器之輸出已會聚至星座點 $a_{n,i}$ 時，由下式求得方程(84)中價值函數之最小值：

五、發明說明 (32)

$$CF_m = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I CF_{m,i} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E[(a_{n,i}^2 - R_i^2)^2], \quad (85)$$

在此情形，常數 R_i 指該組符號 $a_{n,i}$ ，並且子集 $a_{n,i}$ 中之最高符號電平予以界定為 $2m_i-1$ 。

使用樣本子集時，總體系統性能係由每一樣本子集之個別性能所確定，因而系統需要一種性能標準。使用一相等價值函數最小化程序，致使價值函數 $CF_{an,i}$ 以一種致使每一 $CF_{an,i}$ 之殘餘值減少至相同量之方式減至最小。利用相等價值函數最小化：

$$CF_{an,i} = C \quad (86)$$

其中 C 為一適當選擇之常數。利用 GMMA，等化器試圖減低價值函數之殘餘值，俾達成眼開啓之良好性能。

GMMA 之子集樣本之設計

對照僅需要確定一常數 R 供既定正方星座之 MMA 而言，需要若干參數以說明 GMMA 中之樣本子集。另外，請予察知，在價值函數最小化程序之開始，未界定樣本子集 $y_{n,i}$ 。因此，無法容易得出數字解答。然而，吾人已示價值函數可表示為數 m 之函數。因此，價值函數 $CF_{an,i}$ 也可表示為為 m_i 之函數。利用一未知之 m_i ，可以數字方式解價值函數 $CF_{an,i}=C$ 。如果其可表示為 m_i 之函數，便也可解其他參數。

總之， m_i 在總體系統設計為供 GMMA 之基本參數，因為其可就既定之價值函數直接得出。使用一種疊代算法以

五、發明說明 (33)

供計算 m_i (以下所說明)。在得出 m_i 後，可得出其他參數為 m_i 之函數。

圖 22 中示 GMMA 之一例證組之三參數。此等參數為 m_{si} ， w_i ，及 R_i 。一旦界定 m_i ，如以上所說明計算後一項 R_i 。其他參數予以界定如下：

$$m_{si} = m_i - m_{i-1}, \quad (87)$$

其中 m_{si} 為每一樣本子集 $y_{n,i}$ 之符號電平數。

$$w_i = 2m_i, \quad (88)$$

其中 w_i 為樣本邊界。請予察知，界定 w_i 時，樣本子集 $y_{n,i}$ 係予說明為：

$$w_{i-1} \leq |y_{n,i}| \leq w_i. \quad (89)$$

因此，符號子集 $a_{n,i}$ 係予說明為：

$$w_{i-1} \leq |a_{n,i}| < w_i, \quad (90)$$

如圖 22 中所示， w_i 及 w_{i-1} 予以表示為二短劃線，並且樣本子集 $y_{n,i}$ 之 R_i 係予示為實線。

圖 23 中示一供計算 m_i 之疊代算法。 m_i 之計算以 $i=1$ 開始(在步驟 800)，並且 m_i 然後以一種疊代方式在(步驟 805 ($i=1$)及步驟 815 ($i \neq 1$))予以計算。滿足條件 $m_i \geq M$ 時，程式終止(在步驟 820)。此流程圖將就 256-CAP 予以例證性說明。在此實例，由 $m=8$ 求得符號電平之數，並且 dB 中

五、發明說明 (34)

之價值函數 CF_{an} 之殘餘值予以假設為 $C_{dB}=28$ dB。數 $C_{dB}=28$ dB 指 64-CAP 在 MMA 所需要之 CF_{an} 之殘餘值。

m_i 之計算在步驟 800 以 $i=1$ 開始。在步驟 805 計算 m_1 之值。指數 i 等於一時， m_i 之計算簡單。由下式求得價值函數 $CF_{an,i}$ 為 m_1 之函數：

$$CF_{an,1} = E[(a_{n,1}^2 - R_1^2)^2] = \frac{16}{75}(12m_1^4 - 19m_1^2 + 7). \quad (91)$$

在此種設計，假設 $C = 28$ dB。設定 $CF_{an,i}=C$ ，便獲得一正解，亦即， $m_1=4$ 。(請察知，常數 C 係成對數比例，並且首先需予以轉換至線性比例。而且，解答正常並非成整數。因此，將數 m_i 四捨五入，藉以獲得整數解答。)

就對應之樣本子集 $y_{n,i}$ 而言，由下式求得符號電平 m_{s1} 之數：

$$m_{s1} = m_1 \rightarrow m_1 = 4 \quad (92)$$

然後計算樣本邊界 w_1 為：

$$w_1 = 2m_1 = 2 * 4 = 8. \quad (93)$$

對於此值 w_1 ，樣本 $y_{n,1}$ 係予說明為：

$$0 \leq |y_{n,1}| \leq 8. \quad (94)$$

對應而言，符號 $a_{n,1}$ 被限制至：

$$a_{n,1} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}. \quad (95)$$

五、發明說明 (35)

自下式計算常數 R_1 :

$$R_1^2 = \frac{E[a_{n1}^4]}{E[a_{n1}^2]} = \frac{12m_1^2 - 7}{5} = 37 \rightarrow R_1 \approx 6. \quad (96)$$

對於樣本子集 $y_{n,1}$, 在濾波器適應時, 使用等化器輸出樣本 $0 \leq |y_{n,1}| \leq 8$ 時, 等化器使樣本繞常數 $R_1 \approx 6$ 之分散最小。

以上說明 $i=1$ 之推論。對於 $i \neq 1$, 價值函數 $CF_{a,n,i}$ 予以寫作 :

$$CF_{a,n,i} = E[(a_{n,i}^2 - R_i^2)^2] = R_i^4 - E[a_{n,i}^4]. \quad (97)$$

要計算 $CF_{a,n,i}$, R_i 及 $a_{n,i}$ 均必須予以確定為 m_i 之函數。請予察知, $a_{n,i}$ 之初始指數不以一開始。因此, $E[a_{n,i}^4]$ 予以改寫如下 :

$$E[a_{n,i}^4] = \frac{1}{m_{si}} \left(\sum_{n=1}^{m_i} a_n^4 - \sum_{n=1}^{m_{i-1}} a_n^4 \right), \quad (98)$$

其中 $m_{si} = m_i - m_{i-1}$ 。然後 m 中之 $a_{n,i}$ 變成 :

$$E[a_{n,i}^4] = \frac{1}{15m_{si}} [m_i(48m_i^4 - 40m_i^2 + 7) - m_{i-1}(40m_{i-1}^4 - 40m_{i-1}^2 + 7)] \quad (99)$$

並且由下式求得常數 R_i :

$$R_i^2 = \frac{E[a_{n,i}^4]}{E[a_{n,i}^2]} = \frac{12}{5} (m_i^2 - m_{i-1}^2). \quad (100)$$

將 R_i^2 及 $E[a_{n,i}^4]$ 代入價值函數 $CF_{a,i}$, 產生下列結果 :

五、發明說明 (36)

$$CF_{a,i} = R_i^4 - E[a_{n,i}^4], \quad (101)$$

$$= \left(\frac{12}{5} (m_i^2 - m_{i-1}^2) \right)^2 - \frac{1}{15 m_{si}} [m_i (48 m_i^4 - 40 m_i^2 + 7), \quad (102)$$

$$- m_{i-1} (40 m_{i-1}^4 - 40 m_{i-1}^2 + 7)], \quad (103)$$

$$= \frac{64}{25} (m_i^4 - m_{i-1}^4) - \frac{368}{25} m_i^2 m_{i-1}^2 - \frac{16}{5} m_i m_{i-1} (m_i^2 - m_{i-1}^2), \quad (104)$$

$$+ \frac{8}{3} (m_i^2 + m_i m_{i-1} + m_{i-1}^2) - \frac{7}{15}. \quad (105)$$

在疊代算法， m_{i-1} 為已知，並且 m_i 為未知。因此，就方程 $CF_{a,i}=C$ 而言，僅一變數為未知，因而該方程可予以獨特求解。對於 $i=2$ 及 $m_1=8$ ，在步驟 815 獲得正整數解答 $m_2=6$ 。以下為就 $i=2$ 之數 m_{si} 之計算：

$$m_{si} = m_i - m_{i-1} \rightarrow m_{s2} = m_2 - m_1 = 6 - 4 = 2. \quad (106)$$

由下式求得樣本邊界：

$$w_i = 2m_i = 2 * 6 = 12. \quad (107)$$

以 $w_{i-1}=8$ ，樣本子集 $y_{n,2}$ 係由下式所界定：

$$8 \leq |y_{n,2}| \leq 12 \quad (108)$$

對於符號子集 $a_{n,2}$ ，包括三符號電平：

$$a_{n,2} = \{\pm 9, \pm 11\}. \quad (109)$$

利用已知之 m_i 及 m_{i-1} ，計算常數 R_i 。對於 $i=2$ ，

(請先閱讀背面之注意事項再填寫本頁)

裝

訂

線

五、發明說明 (37)

$$R_2^2 = \frac{12}{5}(m_2^2 - m_1^2) = \frac{12}{5}(6^2 - 4^2) = 105 \rightarrow R_2 = 10.25. \quad (110)$$

對於樣本組 $y_{n,2}$ ，在樣本限制至 $8 \leq |Y_{n,2}| \leq 12$ 時，等化器使繞常數 $R_2 = 10.25$ 之分散減至最小。

在步驟 820，測試條件方程 $m_i \geq M$ 。對於 $i=2$ 及 $M=8$ ，由於 $m_2=6$ 小於 M 而不滿足條件。因此，指數計數器在步驟 825 予以增量，以 $i=i+1=3$ ，並且程式回至步驟 815。在步驟 815 就 $i=3$ 重複計算，獲得下列值： $m_3=8$ ， $m_{s3}=2$ ， $w_3=16$ 及 $R_3=14.17$ 。因此，樣本 $y_{n,3}$ 予以界定為：

$$12 \leq |y_{n,i}| < \infty \quad (111)$$

並且在 $a_{n,3}$ 包括二符號電平：

$$a_{n,3} = \{\pm 13, \pm 15\}. \quad (112)$$

對於樣本子集 $Y_{n,3}$ ，在抽頭更新時使用樣本 $12 \leq |Y_{n,2}| \leq \infty$ 時，等化器使分散減至最小至約為 $R_3=14.17$ 。

以 $m_3=8$ 滿足條件方程 $m_i \geq M$ ，因而對於 $i=3$ ，256-CAP 之疊代算法終止。

這完成 256-CAP 之 GMMA 之參數計算。要滿足相等價值函數最小化，如圖 24 中所示，需要總共三數據子集。在此圖中，三數據子集被短劃線 w_i 所劃分，並且實線表示三模數 R_i 。在濾波器適應時，等化器使分散分別減至最少至三模數。

五、發明說明 (38)

GMMA 之概述

GMMA 之重要特色為採用多重模數。然而，要滿足減低錯誤判定之需求，在每一符號子集需包括至少二符號電平。實驗模擬示 GMMA 之價值函數之適當殘餘值係在 30-40dB 範圍。符號電平之數變為超過一定值時，符號電平之數及最小殘餘值之需求便無法均予滿足。例如，對於 $m=16$ 之 1,024CAP，吾人設定 $CF_{an,i}=35dB$ 。吾人需將符號劃分為六子集。

$$a_1 = \{\pm 1, \dots, \pm 11\} \quad a_2 = \{\pm 13, \dots, \pm 17\} \quad a_3 = \{\pm 19, \pm 21\} \quad (113)$$

$$a_4 = \{\pm 23, \pm 25\} \quad a_5 = \{\pm 27, \pm 29\} \quad a_6 = \{\pm 31\}. \quad (114)$$

有太多符號子集具有少數之符號(例如， a_3 - a_6)。因此，在抽頭適應時，盲目算法使用太多錯誤校正項並喪失其有效性。

圖 11 及 12 中示創新概念之例證性實施例。圖 11 例示一表示數位信號處理器 400 之實施例，其予以程式化為實施一根據本發明之原理之 FSLE。數位信號處理器 400 包含一中央處理單元(處理器) 405 及記憶體 410。記憶體 410 之一部份用以儲存程式指令，其在被處理器 405 執行時，實施 GMMA 型算法。記憶體之此部份示為 411。記憶體之另一部份，412，用以儲存處理器 405 根據創新概念所更新之抽頭係數值。假設一接收之信號 404 加至處理器 405，其根據創新概念使此信號等化，以提供一輸出信號 406。僅為供實例之目的，假設輸出信號 406 表示一等化

五、發明說明 (39)

器之輸出樣本之順序。(如在該項技藝所知，在獲得輸出信號 406 前，數位信號處理器可另外進一步處理所接收之信號 404。)由於在獲悉如在本案所說明之 GMMA 型式算法後，此種程式為在精於此項技藝者之能力以內，故例證性軟體程式在本案不予說明。而且，請予察知，任何等化器結構，諸如較早所說明者，可根據創新概念藉數位信號處理器 400 予以實施。

圖 12 例示創新概念之另一替代性實施例。電路 500 包含一中央處理單元(處理器) 505，及一等化器 510。後者如以上所說明，予以例證性假設為一分相 FSLE。假設等化器 510 包括至少一抽頭係數暫存器供儲存對應抽頭係數向量之值(例如，如圖 3 中所示)。處理器 505 包括與圖 11 之記憶體 410 相似之記憶體(未示)，供實施 GMMA 型算法。表示等化器輸出樣本之順序之等化器輸出信號 511 予以加至處理器 505。後者根據創新概念分析等化器輸出信號 511，以一種致使會聚至正確解答之方式使抽頭係數之值適應。

以上所述僅例示本發明原理，並且精於此項技藝者因此將會察知，將能設計很多替代性配置，其雖然未在本案予以明確說明，但具體實施本發明之原理，並為在其精神及範圍以內。

例如，雖然在本案例示本發明為以不連續函數積木塊例如等化器等予以實施，但任何一種或多種此等函數積木塊可使用一個或多個適當程式化處理器予以實施。

五、發明說明 (40)

另外，雖然創新概念係就一種 FSLE 予以說明，但創新概念可適用於其他形式之自適應濾波器，諸如(但不限制於)判定反饋等化器 (decision feedback equalizer，簡稱 DFE)。創新概念可適用於所有形式之通訊系統，例如，廣播網路，例如高解析度電視 (high-definition television，簡稱 HDTV)，點至多點網路如至路緣之纖維(以上所述)，信號識別，或分類，如電線抽頭等應用。

(請先閱讀背面之注意事項再填寫本頁)

裝

訂

線

六、申請專利範圍

1. 一種供使用於通訊接收機之方法，該方法包含下列步驟：

將一信號空間劃分為許多區域；

使用一自適應濾波器結構，供處理一輸入信號，以形成許多輸出樣本，自適應濾波器結構包括對應之數組抽頭係數值，並且輸出樣本信號空間具有關連之座標值；以及

使該組抽頭係數值會聚為輸出樣本及關連區域之座標值之函數。

2. 根據申請專利範圍第 1 項之方法，其中會聚步驟使一價值函數改變為關連區域之函數。
3. 根據申請專利範圍第 2 項之方法，其中價值函數為多模數基。
4. 根據申請專利範圍第 3 項之方法，其中一旦會聚步驟達成一預先界定之誤差速率，該方法包括使用最小均方基價值函數，供最後等化器會聚之步驟。
5. 一種供使用於通訊接收機之方法，該方法包含下列步驟：

將一信號空間分隔為許多區域，每一區域與一樣本子集等化器輸出值相關連；

使價值函數相對於每一樣本子集減至最小，以供使等化器會聚。

6. 根據申請專利範圍第 5 項之方法，其中價值函數為多模數基。

六、申請專利範圍

7. 供在一接收機使用於進行盲目等化之裝置，該裝置包含：

一記憶體，供儲存一會聚算法，並供儲存一組抽頭係數值；以及

一處理器， a) 供過濾一輸入信號為該組所儲存抽頭係數值之函數，以提供輸出樣本，每一輸出樣本在一信號空間具有座標值，其另予劃分為數區域，及 b) 供執行會聚算法，以使該組所儲存之抽頭係數值適應為 i) 輸出樣本值及 ii) 與輸出樣本之座標值關連之信號空間區域之函數。

8. 根據申請專利範圍第 7 項之裝置，其中會聚算法使一價值函數相對於每一信號空間區域減至最小。
9. 根據申請專利範圍第 7 項之裝置，其中會聚算法為多模數基。

(請先閱讀背面之注意事項，
填寫本頁)

裝

訂

線

圖 1

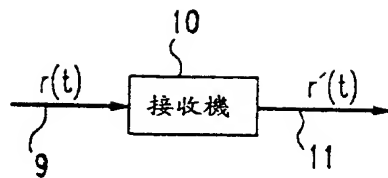
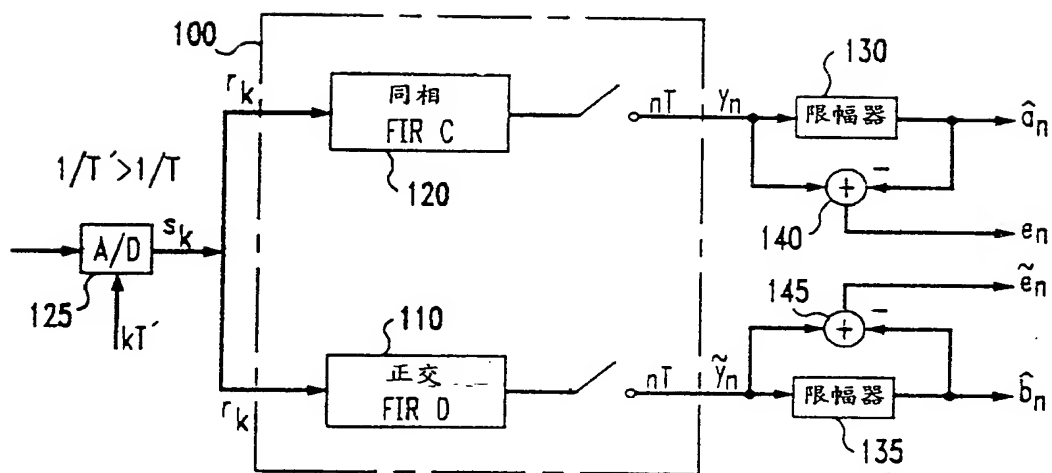


圖 2
先前技藝



：分相 FSLE

圖 3

先前技藝

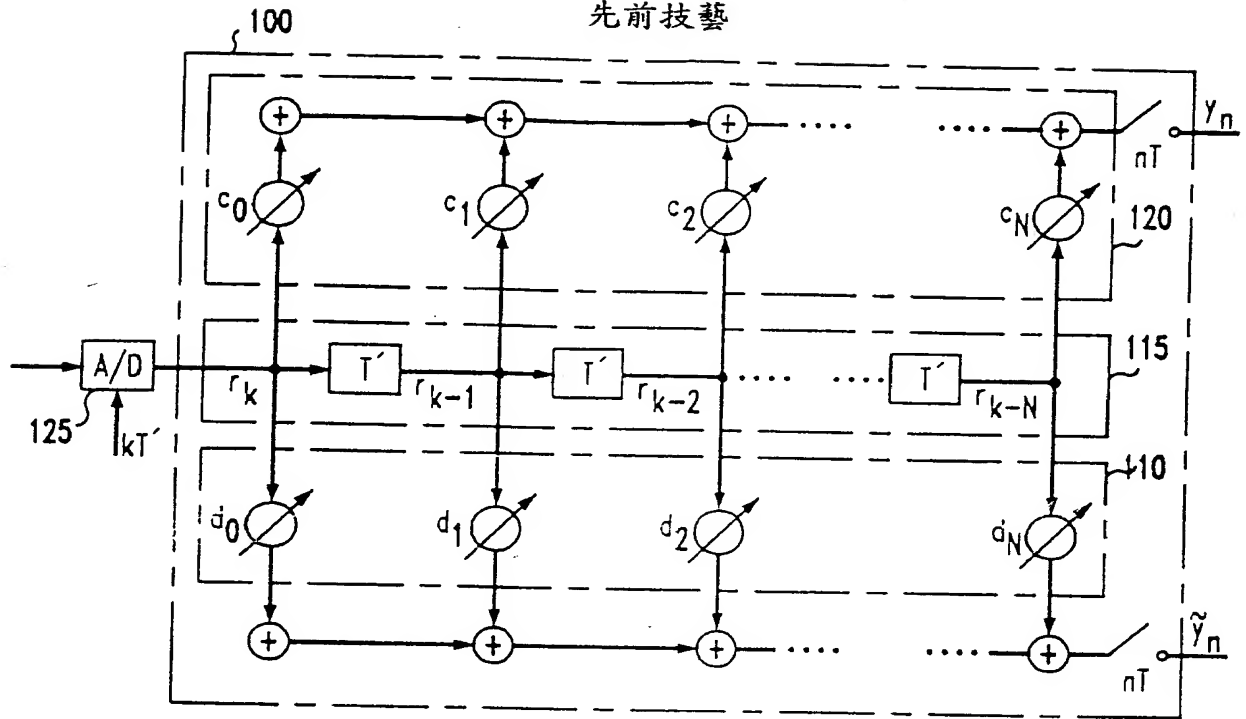


圖 4

先前技藝

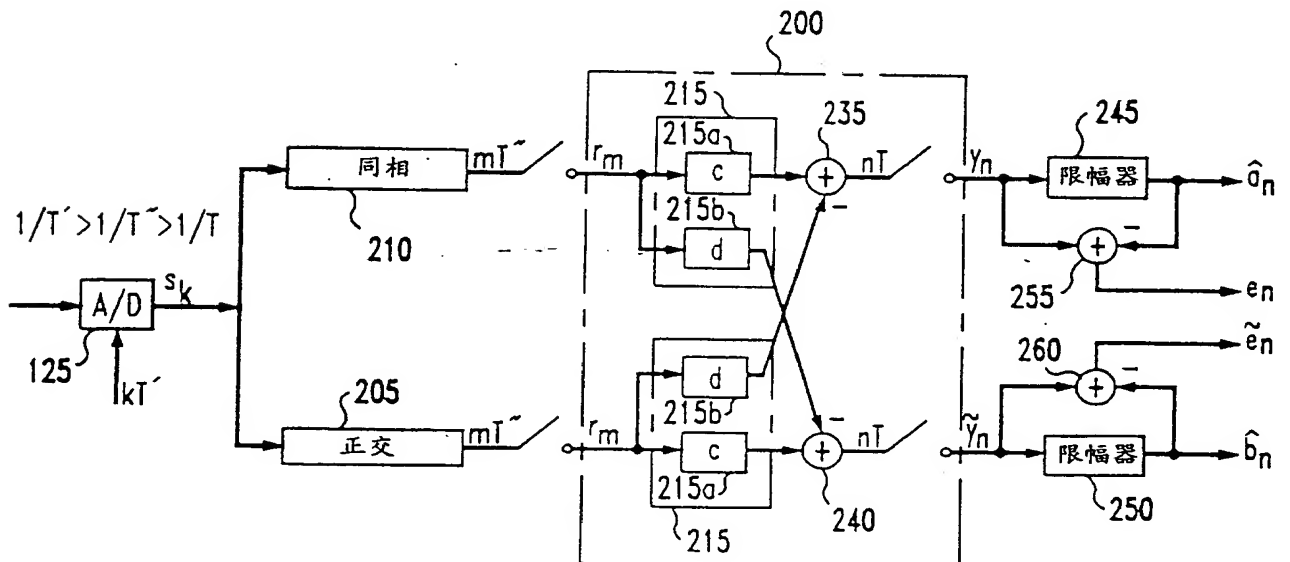


圖 5
先前技藝

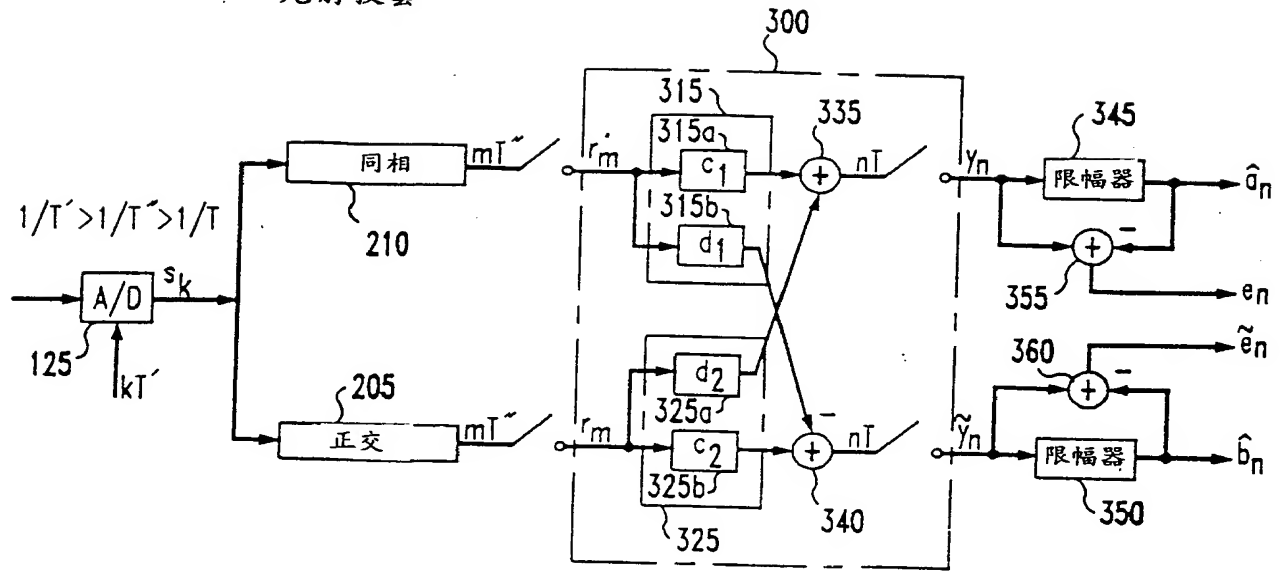


圖 6
先前技藝
未等化信號星座

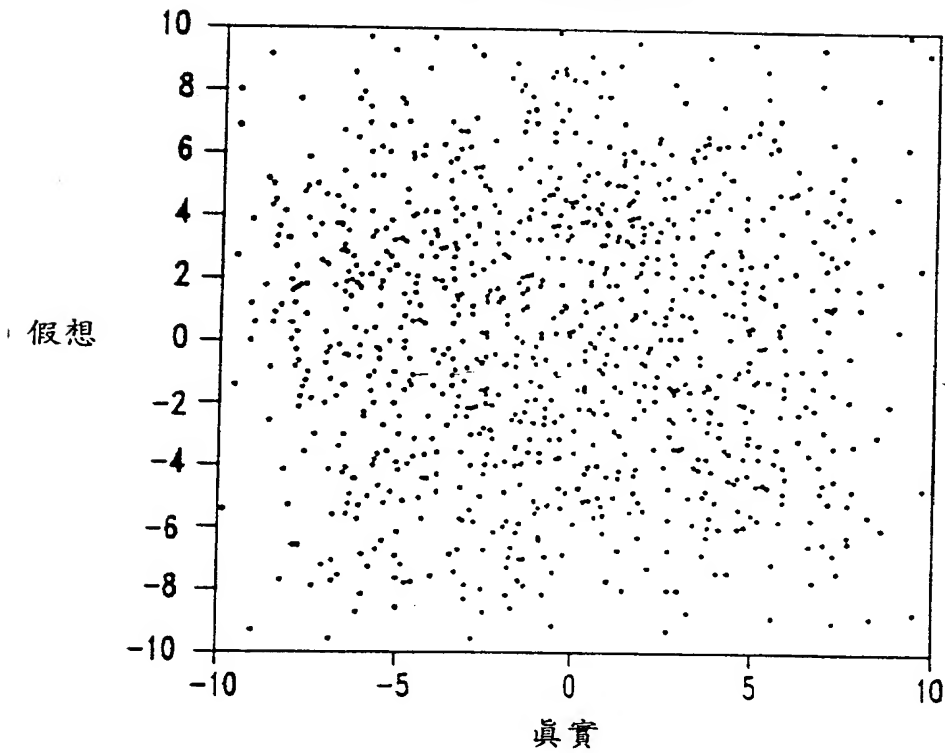


圖 7
MMA 之開始

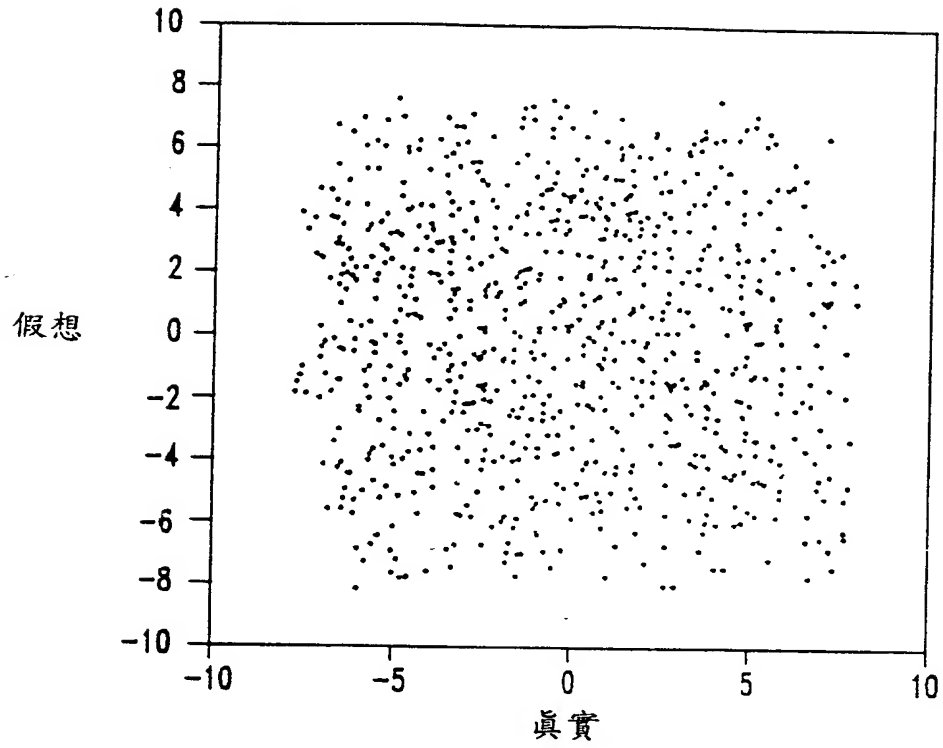


圖 8
先前技藝

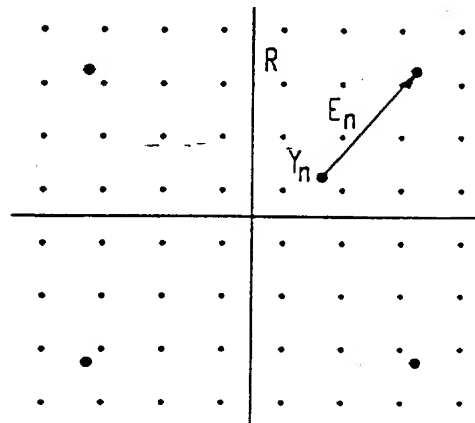


圖 9

先前技藝

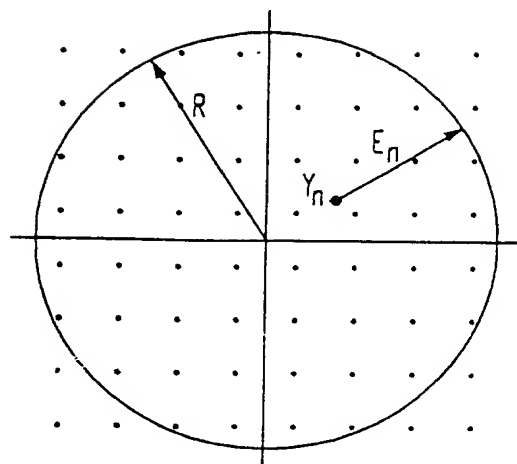


圖 10

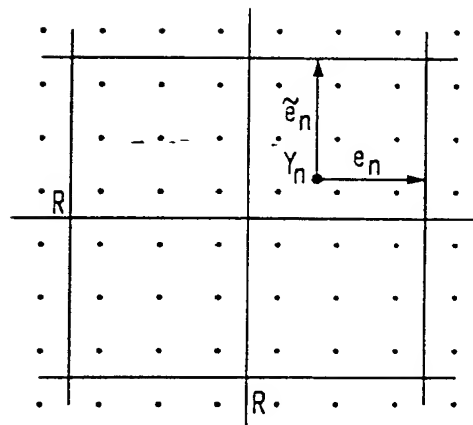


圖 11

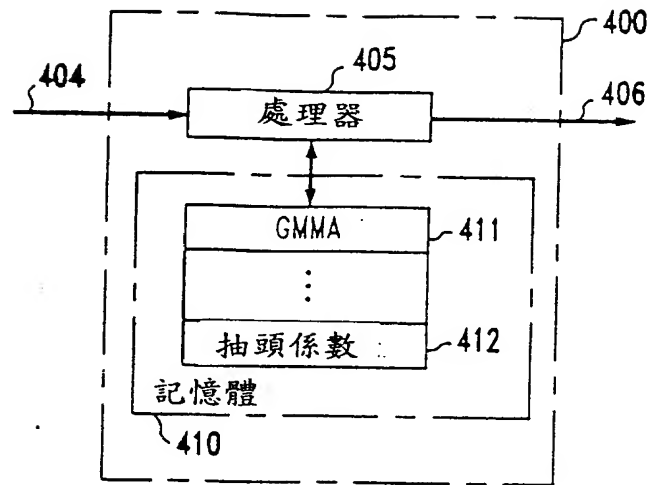


圖 12

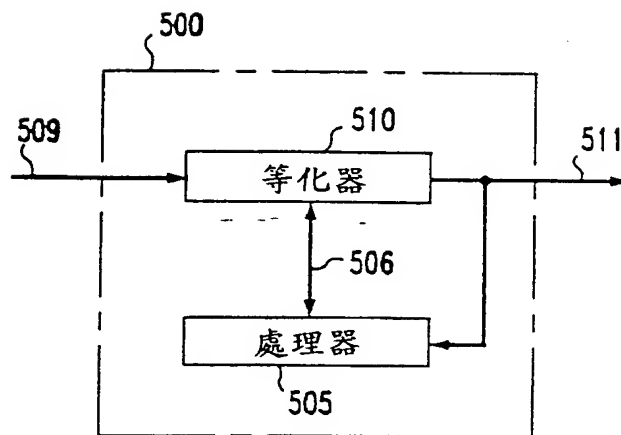


圖 13
同相尺寸之模數

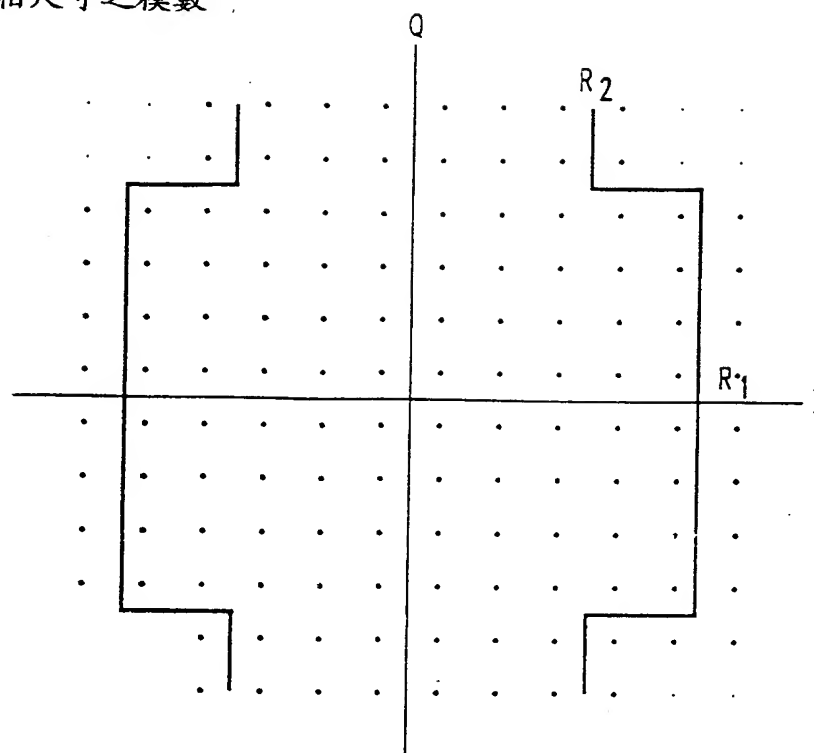


圖 14
正交相尺寸之模數

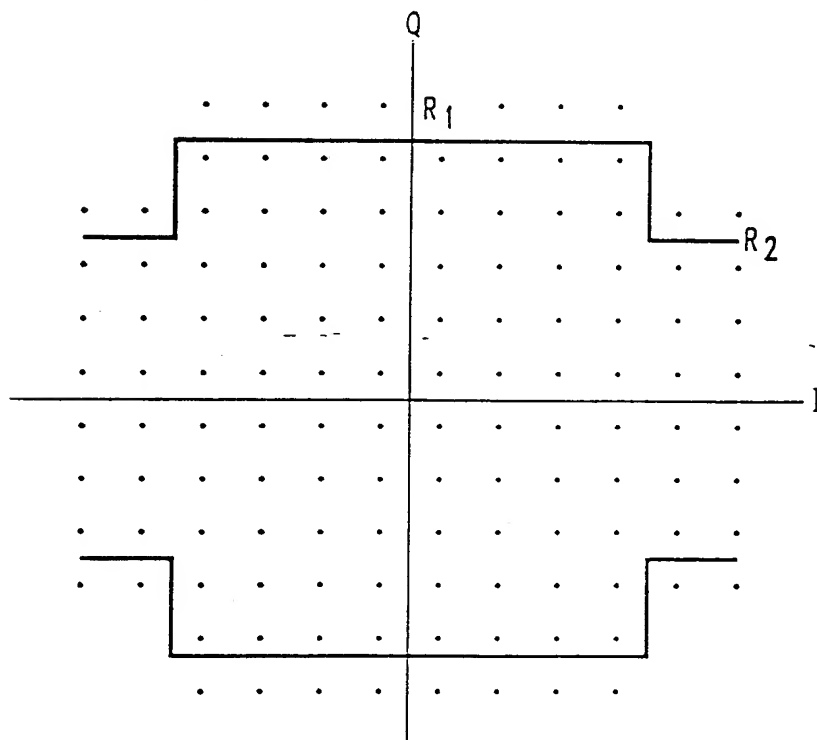


圖 15
二尺寸之模數 I

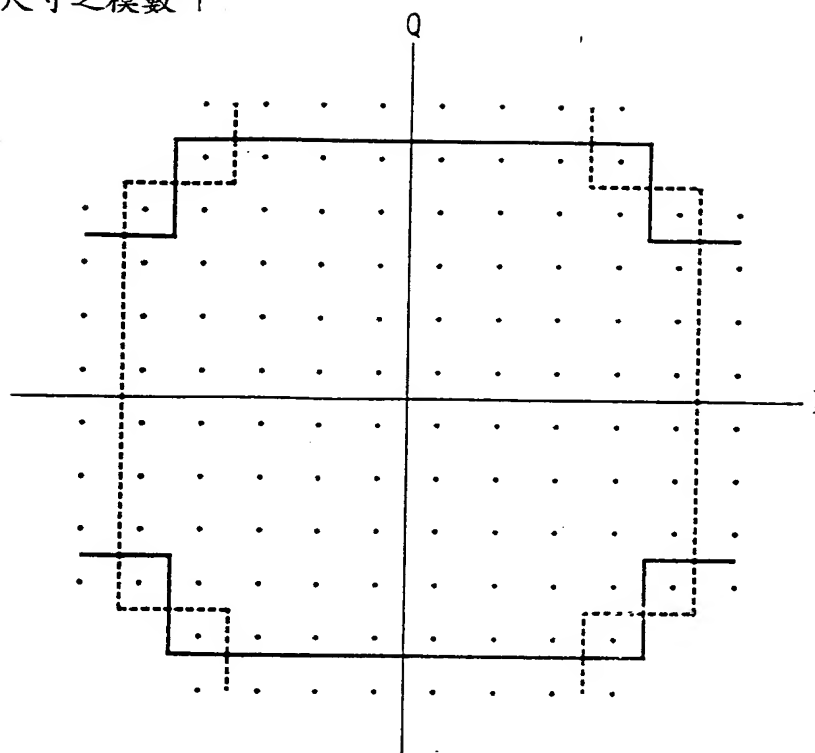
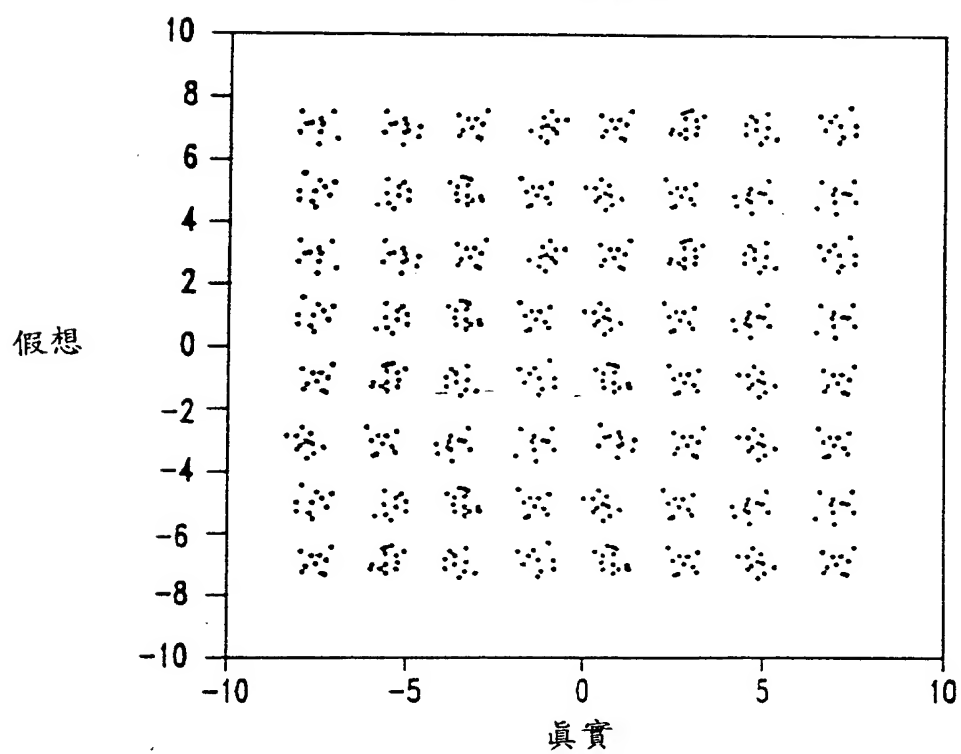


圖 16
與 MMA 會聚後



353904

圖 17

與 64-點限幅器會聚後

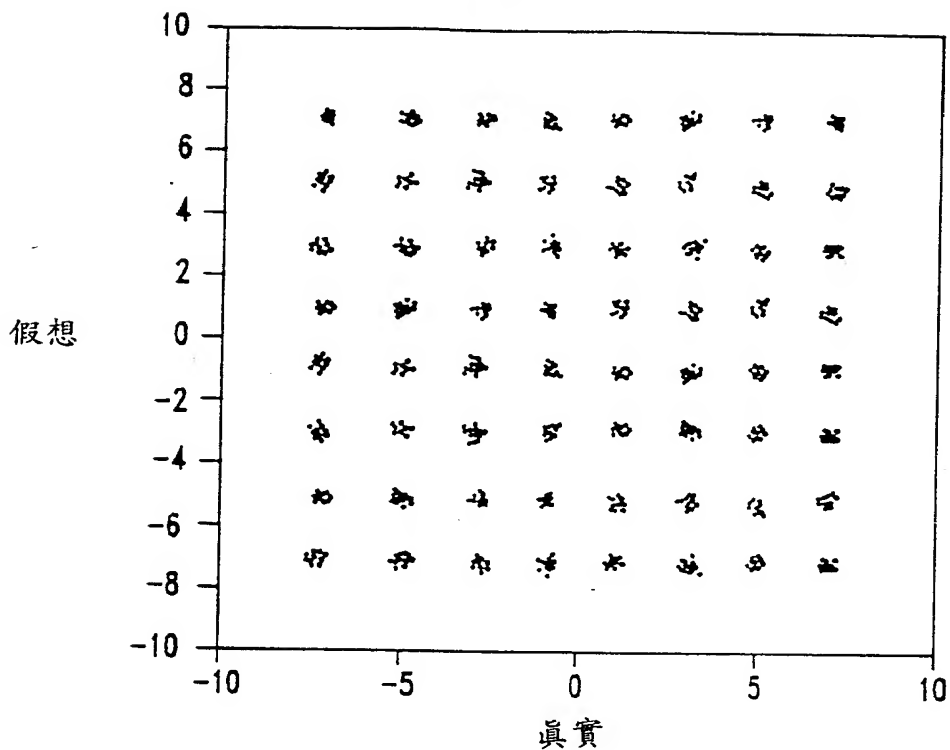


圖 18

其盲目等化算法之主要特徵			
算法	可靠性	複雜性	會聚速度
RCA	低	低	第二最快
MMA	高	中等	最快
CMA	很高	高	最慢

圖 19

符號電平 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 \dots$ 之常數 R, R_1 及 R_2 之值							
算法	4-CAP	16-CAP	32-CAP	64-CAP	128-CAP	256-CAP	512-CAP
RCA	1	2.50	3.64	5.25	7.45	10.625	15.00
MMA	1	2.86	4.32	6.08	8.88	12.34	17.87
CMA	1.414	3.633	5.11	7.616	10.49	15.39	21.11
MMA R_1	--	--	4.49	--	9.22	--	18.55
MMA R_2	--	--	2.86	--	6.08	--	12.34

圖 20

64-CAP 之對角解答

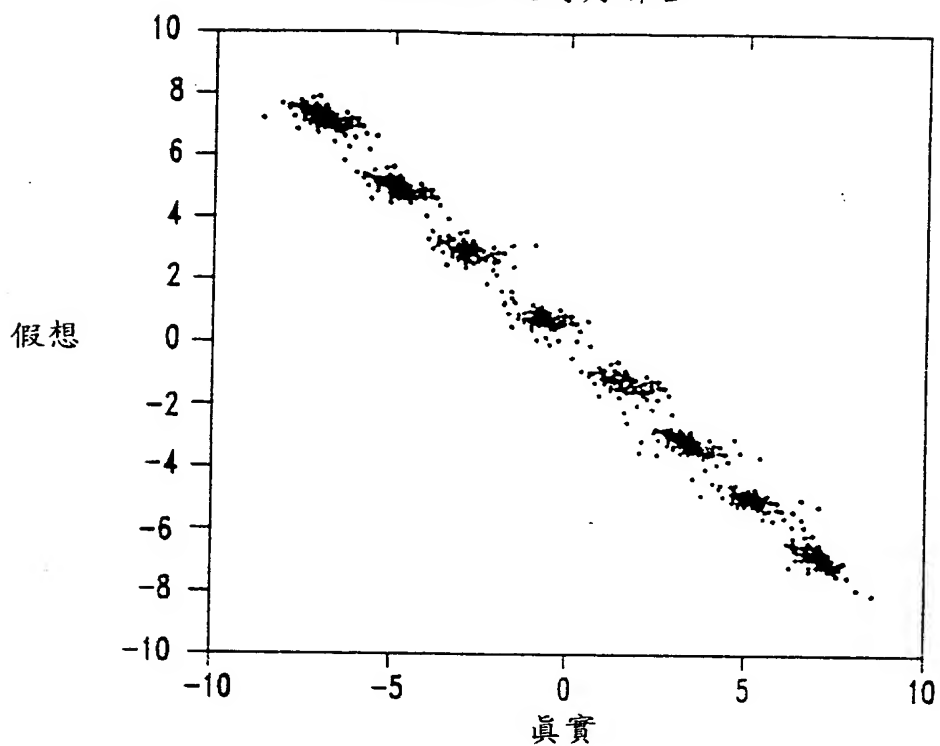


圖 21

表 1：價值函數

CF-CAP	4-CAP	16-CAP	64-CAP	256-CAP	1024-CAP
m	1	2	4	8	16
CF _{an}	0	14.2	27.7	40	52

圖 22

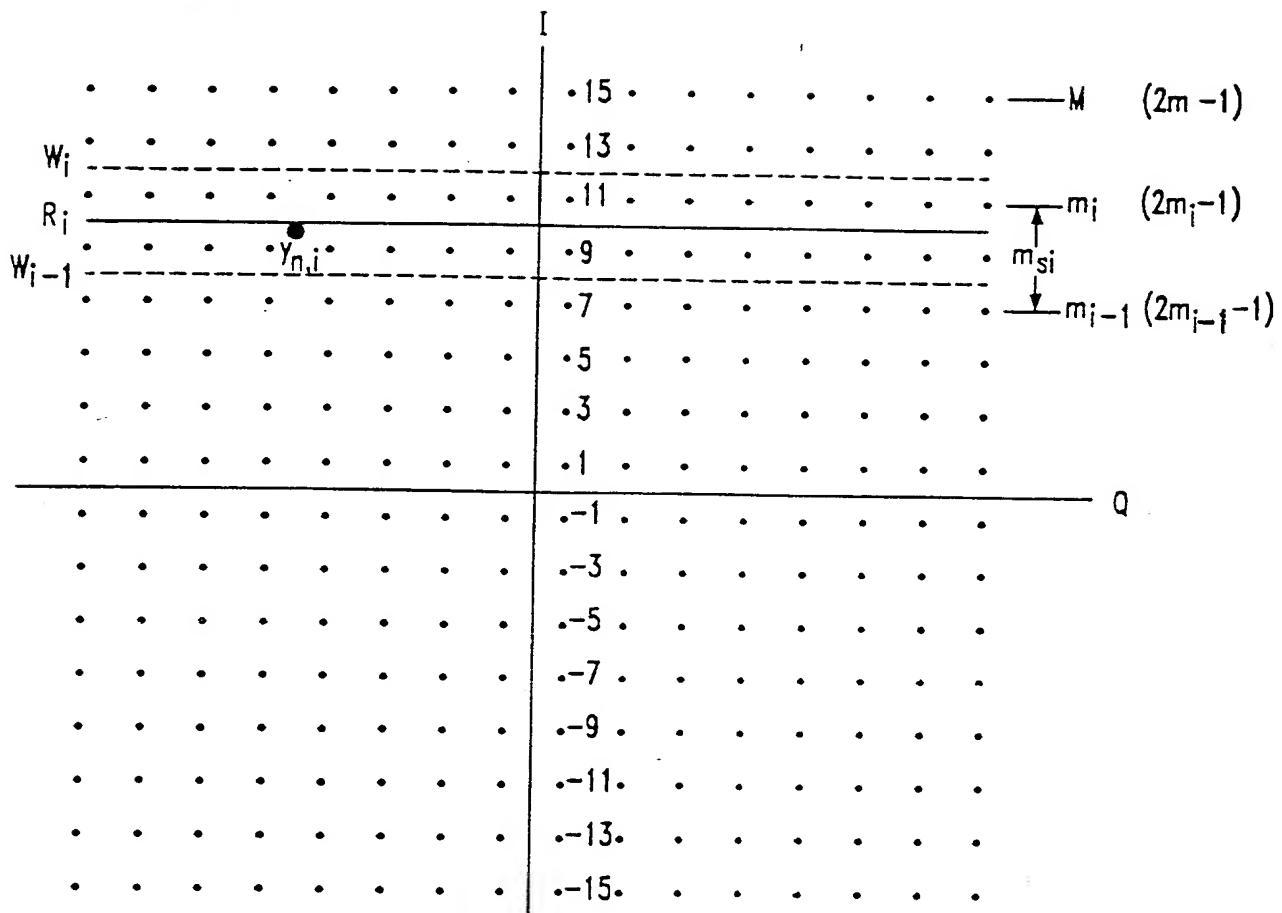
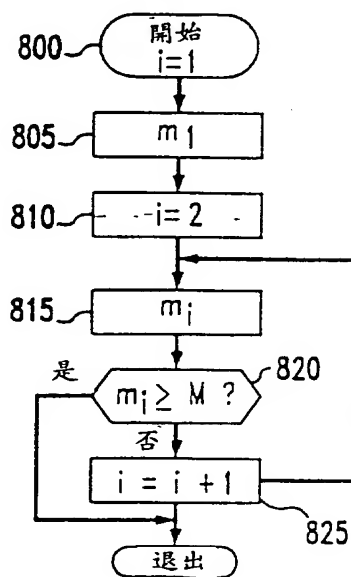


圖 23



359084

圖 24

256-CAP 之多模數

